



# Instabilités locales de structures en composite acier-béton aux températures élevées

Alexis Sauvageon

## ► To cite this version:

Alexis Sauvageon. Instabilités locales de structures en composite acier-béton aux températures élevées. Génie civil. Université Paris Saclay (COMUE), 2016. Français. NNT : 2016SACLN003 . tel-01265603

**HAL Id: tel-01265603**

**<https://theses.hal.science/tel-01265603>**

Submitted on 1 Feb 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY,**  
préparée à l'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

ECOLE DOCTORALE N°579  
Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences

Spécialité  
**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Présentée par  
**Alexis Sauvageon**

Sujet de la thèse

**Instabilités locales de structures composites acier-béton  
aux températures élevées**

Présentée et soutenue à Cachan le 15/01/2016 devant le jury composé de :

Alain Sellier	Professeur des Universités, LMDC Univ-Toulouse	Président du Jury
Christian La Borderie	Professeur des Universités, ISA-BTP	Rapporteur
Ali Limam	Professeur des Universités, INSA Lyon	Rapporteur
Mickaël Abbas	Ingénieur-chercheur, EDF	Examineur
Guillaume Hervé	Enseignant-chercheur, ESTP	Examineur
Rachid Bennacer	Professeur des Universités, ENS de Cachan	Directeur de thèse
Caroline De Sa	Professeur agrégé, ENS de Cachan	Co-encadrante
Pierre Wyniecki	Chercheur associé, ESTP	Co-encadrant
Etienne Gallitre	Expert génie civil, EDF-SEPTEN	Invité
Julien Niepceron	Ingénieur, EDF-SEPTEN	Invité

**LMT-Cachan**

ENS Cachan / CNRS / Université Paris-Saclay  
61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France



**Titre** ◇ Instabilités locales de structures en composite acier-béton aux températures élevées

**Résumé** ◇ Les éléments de construction en béton renforcé par plaque constituent une technologie de construction émergente dont l'utilisation commence à se développer. Ces éléments sont composés de deux plaques en acier en parement d'un béton de remplissage. Les plaques, connectées entre elles par des tiges métalliques, travaillent de façon composite pour octroyer à la structure ses propriétés de résistance mécanique. En cas de voilement local, les transferts d'action acier-béton ne sont plus développés entraînant une perte de résistance globale de la structure. Le présent travail de recherche est consacré

au risque de voilement local induit par une élévation de la température telle qu'elle pourrait survenir dans le cadre d'une utilisation nucléaire de la technologie.

Afin de proposer une méthode de conception adaptée à l'ingénierie, nous veillerons, sur la base de développements analytiques, à définir un domaine de flambement tenant compte de la plasticité locale et à proposer une estimation de la déformée à une température donnée. Les résultats analytiques seront confrontés aux solutions issues de la simulation numérique et de l'expérimentation.

**Mots-clé** ◇ Composite acier-béton, Flambement, von Karman, Thermo-élasticité, Élément fini, Expérimental

**Title** ◇ Local Buckling of Steel-concrete-structures submitted to elevated temperatures

**Abstract** ◇ Steel plate reinforced structure (SC) are an emerging building technologie which use is spreading. One SC panel is made of two external steel plates and a concrete core. The plates, connected together thanks to tiebars, work with the concrete core as a composite providing the structure its resistance properties. In case of local buckling, composite actions between the steel plate and the concrete cannot develop anymore, leading to a loss of resistance of the structure. Our work focuses on preventing the buckling that may result

from a temperature increase in case of accident in a nuclear powerplant.

In order to provide design guidance and based on analytic developments we aim at providing : (i) an operating domain taking into account of the coupling between buckling and plasticity, (ii) an estimation of the deflection at a given temperature. The analytical solutions are finally compared with results obtained from numerical simulations and a local size experimental campaign.

**Keywords** ◇ Steel-concrete structures, Buckling, von Karman, Thermoelasticity, Finite element method, Experiment





**C'**EST AINSI QUE SE CONCLUT CE TRAVAIL DE THÈSE...et que commence ce manuscrit !  
À l'heure de clore cet épisode de vie que constitue la thèse, les souvenirs se bousculent mêlant un sentiment de soulagement et une once de nostalgie. Je pense à ces années et à toutes les personnes qui, par leur aide, leurs encouragements ou tout simplement leur présence, ont permis à ce travail d'aboutir. La liste est longue de celles et ceux qui ont su me communiquer leur passion pour la "science" et créer cette ambiance si spécifique au laboratoire qui vous pousse à venir et poursuivre votre labeur, même lorsque les calculs ne convergent pas !

Merci donc, tout d'abord, aux membres de mon jury. Alain Sellier qui m'a fait l'honneur de présider ce jury a su, avec un brin d'humour, me mettre à l'aise de sorte que la soutenance se passe dans d'excellentes conditions. Mes remerciements les plus sincères vont à mes deux rapporteurs : Christian La Borderie et Ali Limam. Leurs avis d'experts sur ce travail de thèse ont contribué à l'amélioration du document que vous vous apprêtez à lire. Par ailleurs, les riches discussions que nous avons pu avoir lors de la seconde partie de la soutenance ont soulevé de nouvelles perspectives dont je suis curieux de faire l'investigation. Je tiens également à remercier de tout cœur Guillaume Hervé et Mickaël Abbas qui ont examiné cette thèse. Guillaume, au delà du rôle d'examineur, je tiens à te remercier plus personnellement pour tout ce que tu as su m'apporter depuis ma seconde année d'école d'ingénieur. Tu m'as initié à la simulation numérique et m'en a donné le goût à travers le PIR, le stage, la chaire GCN et finalement la thèse. Je n'oublie pas ton rôle dans l'élaboration et le suivi de ce travail de thèse. Pour finir, l'examen très attentionné de mon travail par tes soins a permis d'en améliorer significativement la qualité. Mickaël, j'espère que j'aurai le plaisir de travailler avec toi sur Code\_Aster afin de donner corps aux quelques projets de développements dont nous avons pu discuter. Merci pour ta disponibilité et tes commentaires.

Je suis également reconnaissant à mon équipe encadrante : Pierre et Caroline, merci d'avoir co-encadré ce travail. Les moments de qualité scientifiques et humains que nous avons passés ensemble ont largement contribué à ce que ma thèse se déroule dans de bonnes conditions.

Enfin j'adresse particulièrement mes remerciements à mon directeur de thèse Rachid Bennacer : il a accepté de diriger cette thèse et il s'est rendu disponible dès que les contraintes inhérentes à sa qualité de professeur le lui permettaient. Merci Rachid pour la confiance que tu m'as témoignée tout au long de mes recherches, pour nos fructueuses discussions scientifiques et tes encouragements dans les moments de doute. Le travail à ton contact fut très formateur : que de chemin parcouru durant ces trois années !

Ma reconnaissance va également aux collègues du groupe GS/GC d'EDF SEPTEN. En particulier, merci Etienne et Thierry de m'avoir choisi pour porter ce projet de recherche. Le fort soutien que vous m'avez témoigné dans mes démarches comme dans mes recherches fut très important pour moi. Je remercie également Pascal Belicard pour m'avoir accepté au sein de la division GS. Mes sincères remerciements vont également à Yves Mézière qui,

le premier, m'a initié à la problématique du voilement thermique. Enfin, merci à toi Julien pour tout ce que tu m'as apporté : je ne compte plus toutes les fois où tu m'as accordé ton aide et tes encouragements. Au début de la thèse lorsqu'il a fallu adapter les habitudes d'une grande entreprise à mes besoins spécifiques et tout au long du projet SCIENCE où tu t'es montré très conciliant à mon égard.

Merci également à l'ESTP pour avoir rendu ce projet de thèse possible. En particulier à Jean-Lou Lebrun, Maddy puis Jessica pour leur aide et leur soutien dans l'élaboration de la campagne expérimentale. Merci également à Mohammed Tizi et au service informatique en général pour la gestion du Cloud de calcul et les libertés qu'ils m'ont accordées par rapport à son fonctionnement.

Une mention spéciale pour l'ensemble du personnel du LMT qui m'a accueilli pendant ces trois ans et sans qui ce travail n'aurait pas été le même. Mes remerciements à Amel Sahli pour avoir réglé efficacement et gentiment bien des questions administratives. Mes remerciements les plus sincères vont également à Olivier Rateau et au personnel du DGC dont l'aide dans la conception et la réalisation des essais fut d'un grand secours. Je tiens à remercier tout particulièrement Xavier Pinelli sans qui la campagne d'essais n'aurait pas pu exister ! Quand je pense qu'auparavant je n'avais jamais tenu un tournevis...et que maintenant je me sens chez moi sur la plateforme. Toute ma gratitude va à Jean-Pierre Cordebois, pour l'ensemble des conseils qu'il m'a prodigués, des discussions que nous avons eues et aussi la relecture assidue de mon manuscrit de thèse. Que soit remercié l'ensemble du personnel pour ces moments chaleureux. En particulier tous mes amis, doctorants du LMT : Alex, Maxime, Adrien, Laurent, Silvère, Rana, "Bainier", Dominik, "Python" et "Patate" pour tout ce que nous avons partagé avec bonne humeur. Merci également à "Jonjonc" et François Hild pour l'algorithme de stéréo-corrélation. In english, just in case you would find my thesis, a deep thank you to Milena, my favorite disney-addict coffee-break partner ! A toi, Claire, "ma cobue", merci beaucoup de m'avoir supporté pendant ces trois ans dans ce bureau exigü. Entre les paquets de haribos et les drames impliquant Dinosaures et Princes de Lu, j'ai pu finir de "flamber" ; pour cela ton amitié et ton soutien ont été précieux. Merci également à Christophe, mon co-thésard ENS-ESTP pour tous ces bons moments et son aide indispensable dans l'organisation de la journée de soutenance.

Je ne saurais remercier suffisamment ma famille : ma mère, mon père et ma sœur dont l'aide, la patience et le soutien infaillible m'ont accompagné durant toutes ces années. Tous trois ont bien contribué à ma réussite.

Enfin je vous remercie, lecteur, de vous arrêter sur ce travail qui, je l'espère, vous intéressera et parviendra à répondre à certaines des interrogations qui vous ont amené à le consulter.

Cachan, Janvier 2016.

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Table des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xiii</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>xv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Contexte industriel et technologique</b>	<b>5</b>
1 Description de la technologie . . . . .	6
1.1 Solution constructive et variante . . . . .	7
1.2 Viabilité économique de la construction modulaire . . . . .	12
1.3 Application au génie civil nucléaire . . . . .	14
2 Comportement mécanique à température ambiante . . . . .	17
2.1 Réponse en flexion . . . . .	18
2.2 Résistance au cisaillement . . . . .	22
2.3 Voilement local de la plaque d'acier comprimée . . . . .	26
3 Comportement mécanique à température élevée . . . . .	31
3.1 Comportement à l'incendie . . . . .	31
3.2 Comportement à température modérée . . . . .	37
<b>II Conception d'un modèle numérique du voilement local thermique</b>	<b>45</b>
1 Problème d'instabilité géométrique . . . . .	47
1.1 Critères de détection d'instabilité par analyse de sensibilité . . . . .	48
1.2 Méthodes de résolutions continues . . . . .	51
2 Comportements matériaux . . . . .	55
2.1 Modélisation de l'acier jusqu'à 200°C . . . . .	55
2.2 Modélisation du béton jusqu'à 200°C . . . . .	60
2.3 Comportement aux interfaces . . . . .	66
3 Couplage thermo-mécanique . . . . .	70
3.1 Écriture du problème couplé aux éléments finis . . . . .	70
3.2 Estimation analytique de la déviation sur la température . . . . .	76

3.3	Validation par comparaison avec les résultats numériques . . . . .	80
<b>III</b>	<b>Élaboration d'un critère analytique pour le voilement thermique</b>	<b>87</b>
1	Paramètres pilotant la réponse au voilement thermique . . . . .	88
1.1	Études de criblage par la méthode des plans d'expériences . . . . .	88
1.2	Analyse de sensibilité . . . . .	95
1.3	Couplage plasticité-flambement . . . . .	98
2	Modèle analytique de voilement thermique pour plaques minces . . . . .	104
2.1	Hypothèses fondamentales des plaques minces thermoélastiques . . . .	104
2.2	Résolution approchée du problème de voilement thermique . . . . .	113
2.3	Introduction de la plasticité . . . . .	118
3	Méthode de vérification du voilement thermique . . . . .	123
3.1	Étude du coefficient de criticité . . . . .	124
3.2	Comparaison des résultats analytiques et numériques . . . . .	128
3.3	Méthodologie de vérification destinée à l'ingénierie . . . . .	131
<b>IV</b>	<b>Vérification expérimentale du critère de voilement local</b>	<b>137</b>
1	Étude dimensionnelle du voilement thermique . . . . .	138
1.1	Fondements de l'analyse dimensionnelle . . . . .	138
1.2	Adimensionnement des équations de la modélisation . . . . .	141
1.3	Analyse des distorsions . . . . .	146
2	Conception de la campagne expérimentale locale . . . . .	150
2.1	Conception du support expérimental . . . . .	151
2.2	Systèmes d'acquisition . . . . .	157
2.3	Système de chauffage . . . . .	162
2.4	Synthèse . . . . .	164
3	Réalisation de la campagne expérimentale . . . . .	166
3.1	Observations et interprétations des mesures . . . . .	167
3.2	Confrontation numérique-analytique-expérimentale . . . . .	178
3.3	Perspectives d'amélioration . . . . .	182
	<b>Conclusion</b>	<b>185</b>
<b>A</b>	<b>Résultats de l'analyse de stabilité</b>	<b>189</b>
1	Échelle de la structure . . . . .	189
2	Échelle de la maille élémentaire . . . . .	190
<b>B</b>	<b>Étude comparative des lois béton implémentées dans Code_Aster</b>	<b>193</b>
1	Comportements endommageables de <i>Code_Aster</i> . . . . .	193
1.1	Lois <i>endo_scalaire</i> et <i>endo_carré</i> . . . . .	193
1.2	Loi de comportement <i>endo_isot_beton</i> . . . . .	194
1.3	Loi de comportement <i>Mazars</i> . . . . .	195
1.4	Loi <i>endo_orth_beton</i> . . . . .	195
1.5	Loi <i>beton_double_dp</i> . . . . .	197

2	Caractérisation des Lois bétons de <i>Code_Aster</i> . . . . .	198
2.1	Identification des paramètres à température ambiante . . . . .	198
2.2	Réponses numériques à des sollicitations complexes . . . . .	200
3	Identification des paramètres de la loi de Mazars à températures élevées . . . . .	205
<b>C</b>	<b>Erreur de couplage : compléments aux développements en série</b>	<b>207</b>
1	Existence des séries dérivées de la fonction erreur . . . . .	207
2	Écriture récursive des développements en série . . . . .	208
3	Vitesse de convergence des séries . . . . .	209
<b>D</b>	<b>Solutions analytiques particulières de voilement thermique de plaques minces</b>	<b>213</b>
1	Solutions approchées particulières . . . . .	213
1.1	Cas SC isotherme . . . . .	214
1.2	Variantes . . . . .	226
1.3	Synthèse des solutions . . . . .	229
1.4	Identification du moment de correction . . . . .	236
2	Méthode approchée : minimisation de l'énergie potentielle . . . . .	238
2.1	Fondements de la méthode . . . . .	238
2.2	Expression de la solution analytique . . . . .	240
2.3	Confrontation avec les résultats issus de la méthode de Galerkin . . . . .	240
3	Critère de flambage pour un chargement quelconque . . . . .	241
<b>E</b>	<b>Plans utilisés lors de la campagne expérimentale</b>	<b>245</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>251</b>
	<b>Index des auteurs</b>	<b>265</b>
	<b>Index</b>	<b>269</b>



# Table des figures

1.1	Description d'un panneau en élément SC . . . . .	8
1.2	Variations sur les connecteurs . . . . .	11
1.3	Comparaison des besoins journaliers en ouvriers sur site (a) et de la quantité de matériaux (b) entre RC et SC [Schlaseman et Jeffery, 2004] . . . . .	13
1.4	SC comme voile (a), poteau (b) et dalle (c), adapté de [Takeuchi <i>et al.</i> , 1998] . .	15
1.5	Chargements thermiques : accident grave (a) et ébullition de l'eau (b) . . . . .	16
1.6	Modes de ruine caractéristiques d'un SCs, adapté de [Burgan, 1997] . . . . .	17
1.7	Diagrammes des contraintes équivalentes (SCI-P131) . . . . .	20
1.8	Diagrammes des contraintes équivalentes (JEAC-4618) . . . . .	21
1.9	Réponse au cisaillement plan selon le ratio d'acier $\rho_g$ [Sasaki <i>et al.</i> , 1995] . . . .	25
1.10	Réponse au cisaillement dans le plan, comparaisons analytiques/expérimentales, spécimens (a) et (b) [Varma <i>et al.</i> , 2011d] . . . . .	27
1.11	Contrainte critique de voilement : expériences vs théorie [Zhang <i>et al.</i> , 2014] . .	29
1.12	Étude paramétrique du comportement thermique des SCs . . . . .	32
1.13	Réponse d'un SC au chargement incendie + compression [Moon <i>et al.</i> , 2009] . .	35
1.14	Essais de cisaillement hors-plan (a) et dans le plan (b) avec chargement thermique [Katoh <i>et al.</i> , 2011] . . . . .	36
1.15	Fissuration liée au retrait et au gradient thermique [Varma <i>et al.</i> , 2011a] . . . . .	38
1.16	Déformée sous sollicitation thermo-mécanique : ST1 [Booth <i>et al.</i> , 2007] (a) , ST3 [Varma <i>et al.</i> , 2011a] (b) . . . . .	39
1.17	Influence de la température sur la résistance mécanique [Varma <i>et al.</i> , 2011a, Varma <i>et al.</i> , 2013b] . . . . .	40
1.18	Loi moment-courbure expérimentale (ST3) et prédiction théorique par (1.15) [Varma <i>et al.</i> , 2013b] . . . . .	41
2.1	Structure SC : situation à l'échelle globale (a), locale (b) . . . . .	46
2.2	Instabilités matérielles (a) et instabilités géométriques (b) . . . . .	47
2.3	États d'équilibre stable (a), instable (b) et critique (c) [Ibrahimbegovic, 2006a] .	50
2.4	Direction de recherche du minimum de $\mathcal{J}$ (a) et $\tilde{\mathcal{J}}$ (b) [Abbas, 2013] . . . . .	54
2.5	Écrouissage : acier doux (a), acier inox avec cyclage (b) [Lemaitre <i>et al.</i> , 2009a] .	56
2.6	Courbes ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) d'un acier 43A à températures élevées [Cooke, 1988] . . . . .	57
2.7	Température vs $\frac{\sigma_y(T)}{\sigma_y(20^\circ\text{C})}$ (a), $\frac{E_a(T)}{E_a(20^\circ\text{C})}$ (b) [Willam <i>et al.</i> , 2009] . . . . .	58
2.8	Propriétés thermiques de l'acier normalisées vs Température . . . . .	59



2.9	Courbe $\sigma$ - $\varepsilon$ du modèle de Mazars obtenue ici avec Code_Aster . . . . .	61
2.10	Température vs résistances normalisées : traction (a), compression (b) obtenues expérimentalement [Blundell <i>et al.</i> , 1976] . . . . .	63
2.11	Température vs propriétés thermiques du béton normalisées (a), diffusivité (b) selon EN 1992-1-2 . . . . .	65
2.12	Essai de push-off, spécimen testé (a), rupture interface (b) . . . . .	67
2.13	Comportement Joint_Rupture (a), Joint_Frottant (b) [Kazymyrenko, 2014] . . . .	68
2.14	Transferts 1D . . . . .	70
2.15	Schémas de couplage monolithique (a), itératif (b), décalé (c) et parallèle (d) (adapté de [Moutoussamy, 2013]) . . . . .	72
2.16	Description du système thermo-mécanique : géométrie (a), allure des gradients (b) . . . . .	76
2.17	Erreur relative à $\tau = 900s$ : lame d'air (a), contact thermique parfait (b) . . . .	80
2.18	Champs $\tilde{\theta}$ numérique (a), analytique (b) au voisinage du connecteur . . . . .	81
2.19	Champs $\delta\tilde{\theta}$ numérique (a), analytique (b) au voisinage du connecteur . . . . .	82
2.20	Erreurs maximales $\delta\tilde{\theta}_{\max}$ en fonction du temps, au voisinage du connecteur . . .	82
2.21	Champs $\tilde{\theta}$ numérique (a), analytique (b) au centre de l'élément . . . . .	83
2.22	Champs $\delta\tilde{\theta}$ numérique (a), analytique (b) au centre de l'élément . . . . .	84
2.23	Erreurs maximales $\delta\tilde{\theta}_{\max}$ en fonction du temps, au centre de la zone voilée, en présence d'une lame d'air (a), continuité des températures à l'interface (b) . . .	84
3.1	Effets des paramètres étudiés sur la température critique (a) et le déplacement hors-plan (b) . . . . .	94
3.2	Sensibilité des paramètres géométriques : élancement (a), défaut initial (b) . .	96
3.3	Sensibilité des conditions limites : vitesse de chauffe (a), raideur du bridage (b) .	97
3.4	Sensibilité des hypothèses de modélisation : béton (a), plaque en acier (b) . . .	98
3.5	Mise en évidence des régimes de fonctionnement en présence de voilement : sur $w$ (a), sur $\frac{\partial w}{\partial \tau}$ (b), sur $F_x$ (c) . . . . .	99
3.6	Domaines de fonctionnement pour $T_{\text{crit}}$ et $T_y$ . . . . .	100
3.7	Indice de plasticité (a-b-c), vecteur des déformations principales 1 : $\varepsilon_I$ (d-e-f) pour une plaque $\varphi = 50$ . . . . .	101
3.8	$\frac{w_r}{w_{\max}}$ en fonction de $T$ et de $\varphi$ . . . . .	103
3.9	Déformation du système plaque dans la direction $\vec{x}$ . . . . .	107
3.10	Conditions d'équilibre de membrane (a) et de flexion (b) . . . . .	109
3.11	Équilibre des efforts en configuration déformée, adaptée de [Dubas, 1955] . . .	111
3.12	Influence des conditions limites sur la rotation et le moment au bord . . . . .	115
3.13	Solution analytique élastique vs calcul élément finis tenant compte de la plasticités : $\varphi = 30$ (a), $\varphi = 80$ (b) . . . . .	119
3.14	Plasticité par la méthode du module équivalent $E^{\text{eq}} = \eta E$ , $\varphi = 30$ . . . . .	120
3.15	Localisation des contraintes en cas de plastification locale . . . . .	122
3.16	Solution analytique améliorée vs calcul éléments finis : $\varphi = 30$ (a), $\varphi = 80$ (b) . .	123
3.17	Sensibilité au paramètre $\Lambda$ : $\Delta T_{\text{crit}}$ (a), $W_{pf}(\varphi = 80)$ (b) . . . . .	125

3.18 Évolution de $k_{crit}$ en fonction de $\gamma$ (a), Influence du mode du défaut sur le mode de voilement (b) . . . . .	126
3.19 Modes de voilement théoriques pour un voile SC à $T = T_{ext}$ (a), $T = T_{crit}$ (b) . .	127
3.20 Domaines numériques de plastification et de voilement vs analytiques . . . . .	128
3.21 Domaine de fonctionnement des SCs au cloquage thermique . . . . .	129
3.22 Confrontation solution analytique et numérique : écarts relatifs (a), absolus (b)	129
3.23 Confrontation solution analytique et numérique : amplification du défaut . . .	130
3.24 Champ de déplacements du voile exemple : à 92°C (a), 180°C (b) . . . . .	134
3.25 Évolution du déplacement hors-plan au centre du voile exemple . . . . .	134
4.1 Cartes des facteurs de prédiction pour la variable $\theta$ . . . . .	148
4.2 Effet d'une homothétie sur le déplacement hors-plan . . . . .	149
4.3 Conditions limites théoriques à récupérer : déplacement plan $s_x = s_y = 635\text{mm}$ (a), effort normalisé $N/N_y^{gl}$ (b) . . . . .	151
4.4 Vue en éclaté du support expérimental . . . . .	153
4.5 Isolation : Ruine du verre poinçonné (a) KV <sup>®</sup> 3eco (b) . . . . .	154
4.6 Mesures de retrait : total (a) endogène (b) . . . . .	156
4.7 Champs de déplacements à 200°C (×5), modèle FEM du dispositif expérimental . . . . .	157
4.8 LVDT : position (a), technologie (b) . . . . .	158
4.9 Préparation de la plaque chauffée pour l'étalonnage de la stéréo-corrélation .	159
4.10 Étalonnage des matrices : Résidus à l'itération 1 (a), Résidus finaux (b) . . . . .	160
4.11 Position des thermocouples : Vue du dessus (a), Coupe au centre (b) . . . . .	162
4.12 Puissances théoriques nécessaires pour assurer la consigne en température . .	164
4.13 Étapes intermédiaires de montage . . . . .	165
4.14 Montage expérimental . . . . .	166
4.15 SPE83(a) : Déplacement L0 (a), Température P0 (b) . . . . .	167
4.16 SPE83(b) : Mesures ponctuelles, déplacements (a), températures (b) . . . . .	168
4.17 SPE83(b) : Champs de déplacement DX (a), DY (b), DZ (c) . . . . .	169
4.18 SPE83(c) : Déplacements ponctuels (a), Températures ponctuelles (b) . . . . .	170
4.19 SPE83D : voilement à l'issue de l'essai . . . . .	171
4.20 SPE83D : Mesures ponctuelles, déplacements (a), températures (b) . . . . .	171
4.21 SPE83D : Champs de déplacement DX (a), DY (b), DZ (c) . . . . .	172
4.22 SPE66 : Mesures ponctuelles, déplacements (a), températures (b) . . . . .	173
4.23 SPE50 : Mesures ponctuelles, déplacements (a), températures (b) . . . . .	174
4.24 SPE50 : Champs de déplacement DX (a), DY (b), DZ (c) . . . . .	174
4.25 SPE50D : Mesures ponctuelles, déplacements (a), températures (b) . . . . .	175
4.26 SPE50D : Champs de déplacement DX (a), DY (b), DZ (c) . . . . .	175
4.27 SPE50D : Montage du Kayence (a), fissure dans le joint de soudure ×50 (b) . . .	176
4.28 Détermination de la température critique à partir des données expérimentales	177
4.29 Maillage représentatif d'un essai de voilement thermique local . . . . .	179
4.30 Régimes post-critiques expérimentaux, numériques et analytiques : SPE50 (a), SPE66 (b) SPE83b (c) et SPE83D (d) . . . . .	180

4.31 SPE50D : Champs obtenus par éléments finis, déplacement $u_x$ (a), température (b) . . . . .	181
A.1 Modes de flambement normalisés pour un voile SC sollicité en bi-compression issus de l'analyse de stabilité ( $\times 0.1$ ) . . . . .	190
A.2 Modes de flambement normalisés pour une maille élémentaire SC sollicitée en bi-compression issus de l'analyse de stabilité ( $\times 0.05$ ) . . . . .	190
B.1 Lois de comportements implémentés en compression (a) et traction (b) . . . . .	199
B.2 Comportement cyclique des lois <i>mazars</i> (a), <i>endo_isot_beton</i> (b), <i>beton_double_dp</i> (c) et <i>endo_orth_beton</i> (d) . . . . .	201
B.3 Validation numérique élémentaire du confinement - situation . . . . .	202
B.4 réponse au confinement des lois <i>mazars</i> (a), <i>endo_isot_beton</i> (b), <i>beton_double_dp</i> (c) et <i>endo_orth_beton</i> (d) . . . . .	202
B.5 Dépendance au trajet de sollicitation de la déformation thermique axiale des lois <i>mazars</i> (a), <i>endo_isot_beton</i> (b), <i>beton_double_dp</i> (c) et <i>endo_orth_beton</i> (d) . . . . .	203
B.6 Courbes $\sigma$ - $\varepsilon$ de mazars issues de l'identification à hautes températures, en compression (a) et traction (b) . . . . .	205
C.1 Approximations, à $\tau = \tau_f$ , à l'ordre $m$ de la température $\tilde{\theta}$ (a), de l'erreur $\delta\tilde{\theta}$ d'ordre 1 (b), de l'erreur $\delta\tilde{\theta}$ d'ordre 2 (c) et de l'erreur $\delta\tilde{\theta}$ d'ordre 3 (d) . . . . .	210
C.2 Approximations, en $\tilde{x} = 0.1$ , à l'ordre $m$ de la température $\tilde{\theta}$ (a), de l'erreur $\delta\tilde{\theta}$ d'ordre 1 (b), de l'erreur $\delta\tilde{\theta}$ d'ordre 2 (c) et de l'erreur $\delta\tilde{\theta}$ d'ordre 3 (d) . . . . .	211
D.1 Plaque SC (a) avec chargement isotherme (b) . . . . .	214
D.2 Confrontation des solutions raccordées avec la solution numérique ( $\varphi = 30$ ) . . . . .	225
D.3 Plaque AAAA (a) avec chargement isotherme (b) . . . . .	226
D.4 Plaque EEEE (a) avec chargement isotherme (b) . . . . .	227
D.5 Plaque SC+mécanique (a) avec chargement isotherme (b) . . . . .	227
D.6 Plaque SC (a) avec chargement anisotherme (b) . . . . .	228
D.7 Notion de demi-onde . . . . .	230
D.8 Identification de $\omega_M$ : domaine de flambement . . . . .	237
D.9 Identification de $\omega_M$ en fonction de l'élancement $\varphi$ . . . . .	237
D.10 Domaine de voilement solution corrigée SC (§1.3.2) . . . . .	238
D.11 Confrontation des approches FEM, Galerkin et énergétique, $\varphi = 30$ (a) et $\varphi = 60$ (b) . . . . .	241
D.12 Repère des contraintes principales . . . . .	241
D.13 Plaque circonscrite à la maille élémentaire SC . . . . .	242

# Liste des tableaux

1.1	Limite élastique (N/mm <sup>2</sup> ) de l'acier proposée dans la littérature . . . . .	10
1.2	Diamètre maximal standard des goujons prescrits par le JEAC-4618 . . . . .	12
1.3	Charges à rupture en flexion rencontrées dans la littérature . . . . .	19
1.4	Moment résistant (AISC et KEPIC-SNG) . . . . .	22
1.5	Critères de résistance au cisaillement hors-plan issus de la littérature . . . . .	23
1.6	Charges critiques rencontrées dans la littérature . . . . .	27
1.7	Critères de voilement local issus de la littérature . . . . .	30
1.8	Résistances au feu de poteaux hybrides [Han <i>et al.</i> , 2003] . . . . .	34
2.1	$\lambda$ , à température ambiante des constituants du béton [Naus, 2010] . . . . .	64
2.2	Influence des paramètres $x, \tau, i, m$ et $\Delta\tau$ sur l'erreur de couplage prédite . . . . .	79
3.1	Matrice des effets pour un plan $2^{3-1}$ . . . . .	90
3.2	Paramètres étudiés et leurs niveaux pour $T_{crit}$ et $w$ . . . . .	91
3.3	Aliases dépendantes : plan $2^{10-5}$ de résolution IV . . . . .	92
3.4	Aliases dépendantes : plan $2^{10-6}$ de résolution IV . . . . .	92
3.5	Matrices des effets $2^{10-5}$ pour $T_{crit}$ (a) et $2^{11-6}$ pour $w$ (b) . . . . .	93
3.6	$\frac{w_r}{w_{max}}$ en fonction de $T$ et de $\varphi$ . . . . .	102
4.1	Paramètres dimensionnés géométriques . . . . .	142
4.2	Paramètres dimensionnés - sous-système thermique . . . . .	143
4.3	Paramètres dimensionnés - sous-système mécanique . . . . .	144
4.4	Matrices des unités : thermique (a) et mécanique (b) . . . . .	145
4.5	Paramètres sans dimension : thermique (a) et mécanique (b) . . . . .	146
4.6	Distorsions suite à une transformation géométrique isotrope . . . . .	147
4.7	Rapports de chaque grandeur sur sa référence pour $M_{Ref}$ , $M_{\mathcal{H}}$ , $M_{\mathcal{H}^2}$ et $M_{Corr}$ . . . . .	148
4.8	Caractéristiques géométriques des éléments testés . . . . .	150
4.9	Efforts théoriques maximums développés lors des essais . . . . .	151
4.10	Fonctions et contraintes des constituants du support . . . . .	153
4.11	Propriétés mécaniques et thermiques des solutions d'isolation thermique . . . . .	155
4.12	Résultats expérimentaux - voilement thermique local . . . . .	178
B.1	Relation entre les coefficients de la loi beton_double_dp . . . . .	197
B.2	Nature des paramètres matériaux des modèles bétons de Code_Aster . . . . .	198

B.3	Valeurs des paramètres matériaux retenus après identification . . . . .	199
B.4	Comparaison des lois béton de <i>Code_Aster</i> . . . . .	204
B.5	Paramètres de mazars après identification à hautes températures . . . . .	205
D.1	Solution analytique : élément SC isotherme . . . . .	231
D.2	Solution analytique : plaque simplement appuyée isotherme . . . . .	232
D.3	Solution analytique : plaque encastrée isotherme . . . . .	233
D.4	Solution analytique : élément SC isotherme + chargement mécanique imposé .	234
D.5	Solution analytique : élément SC anisotherme . . . . .	235

# Nomenclature

Cette nomenclature présente les notations les plus couramment utilisées dans ces travaux. Dans le corps de texte la notation peut être ponctuellement modifiée pour caractériser des grandeurs nouvelles. On se référera donc en premier lieu au texte descriptif qui, en cas de litiges, se supplante à la présente nomenclature.

## Glossaire

Sym.	Signification	Sym.	Signification
ABI	Analytique, Bridage Imparfait	KEA	Korean Electric Association
ABP	Analytique, Bridage Parfait	RC	Reinforced Concrete
BWA	Boiling Water Accident	ROI	Region of Interest
CNPE	Centrale Nucléaire de Production d'Electricité	SC	Steel plate reinforced Concrete
EDF	Électricité de France	SCI	Steel construction institute
EIP	Elément Important pour la Protection	SCIENCE	Steel Concrete for Industrial, Energy and Nuclear Construction Efficiency
EN	Norme Européenne	SDIC	Stereo Digital Image Correlation
ICB	Interface Connecteur-Béton	SFR	Sodium Fast Reactor
IPB	Interface Plaque-Béton	SMR	Small Modular Reactor
JEA	Japanese Electric Association		

## Variables scalaires

Sym.	Signification	U.	Sym.	Signification	U.
$\alpha$	diffusivité thermique	$\text{m}^2/\text{s}$	$\varpi_M$	poids de la correction apportée sur le moment	–
$\beta$	dilatation thermique	$\text{m}/(\text{m}^\circ\text{C})$	$\Phi_i$	base fonctionnelle Galerkin ( $\check{u}_y$ )	–
$\delta\theta$	écart de température relatif	%	$\Phi$	flux	W
$\gamma$	élancement plan (plaque)	$s_x/s_y$	$\varphi$	élancement (plaque)	$s_y/t_p$
$\Gamma_i$	base fonctionnelle Galerkin ( $\check{u}_x$ )	–	$\varphi$	densité de flux surfactive	$\text{W}/\text{m}^2$
$\gamma_i$	coefficient de Galerkin	–	$\Psi_i$	base fonctionnelle Galerkin ( $\check{u}$ )	–
$\kappa$	courbure	$\text{m}^{-1}$	$\psi$	potentiel d'état	J
$\epsilon$	émissivité	–	$\rho$	masse volumique	$\text{kg}/\text{m}^3$
$\varepsilon$	déformation	–	$\varrho_a$	quantité d'acier	%
$\varepsilon_{d_0}$	seuil d'endommagement	–	$\varrho_{sh}$	rapport de portée en cisaillement	%
$\Lambda$	paramètre d'anisothermie	–	$\sigma$	contrainte	Pa
$\dot{\lambda}^{pl}$	multiplicateur plastique	–	$\sigma'$	déviateur des contraintes	Pa
$\lambda$	coefficient de conductivité thermique	$\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$	$\sigma_H$	contraintes hydrostatiques	Pa
$\lambda_L$	premier coefficient de Lamé	Pa	$\sigma_0$	constante de Boltzmann	$\text{W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$
$\mu_L$	second coefficient de Lamé	Pa	$\tau$	temps	s
$\nu$	coefficient de Poisson	–	$\theta$	écart de température avec milieu ambiant	$^\circ\text{C}$
$\Pi$	énergie potentielle	J	$\theta$	angle de rotation	rad
$\pi$	constante $\pi$	–	$\xi$	défaut adimensionné	$\check{W}/t_p$
$\pi$	nombre sans dimension	–	$\zeta_i$	coefficients partiels de $w$ analytique	–
$\varpi$	poids	–			

Sym.	Signification	U.	Sym.	Signification	U.
$A$	section	$m^2$	$R$	variable associée à l'écroutissage isotrope	Pa
$C$	raideur de membrane (plaque)	N/m	$r$	variable d'état d'écroutissage isotrope	–
$C_p$	chaleur spécifique	J/(kgK)	$R^{th}$	résistance thermique	K/W
$D$	raideur de flexion (plaque)	Nm	$s$	espacement connecteurs	m
$D$	variable d'endommagement	–	$T$	température	°C
$E$	module d'Young	Pa	$t$	épaisseur	$m$
$e$	excentricité	m	$T_0$	température initiale	°C
$E_{sec}$	module sécant	Pa	$T_{rf}$	température de raccord	°C
$E_{tan}$	module tangent	Pa	$U$	amplitude de $\ddot{u}_x$	m
$F$	fonction d'Airy	Nm	$u$	déplacement plan	m
$f$	effort	N	$U_f$	énergie de déformation de flexion	J
$h$	coefficient d'échange convectif	W/(mK)	$U_m$	énergie de déformation membrane	J
$h^{pe}$	contraste	–	$V$	amplitude de $\ddot{u}_y$	m
$h^{th}$	conductance thermique	W/(K)	$W$	amplitude de $\ddot{u}$	m
$I$	module d'inertie	$m^4$	$w$	déplacement hors-plan	m
$K$	raideur	N/m	$w_{af}$	déformée en régime pré-critique	m
$k_{crit}$	coefficient de criticité	–	$w_{pf}$	déformée en régime post-critique	m
$l$	longueur	m	$w_{rf}$	déformée solution raccordée	m
$M$	moment	Nm	$\ddot{W}$	amplitude de $\ddot{w}$	m
$M_\Sigma$	moment somme	Nm	$\ddot{w}$	imperfection géométrique	m
$N$	effort membranaire	N/m	$Y$	force associée à l'endommagement	Pa
$Nu$	nombre de Nusselt	–			
$\emptyset$	diamètre	m			
$p_t$	charges transverses surfacique	Pa			
$Q$	effort cisaillement	N			



## Variables tensorielles

Sym.	Signification	U.	Sym.	Signification	U.
$\underline{\square}$	tenseur d'ordre 1	–	$\underline{\underline{\text{Id}}}$	tenseur identité	–
$\underline{\underline{\square}}$	tenseur d'ordre 2	–	$\underline{\underline{K}}_{\text{geo}}$	raideur géométrique	N/m
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	déformations	–	$\underline{\underline{K}}_{\sigma}$	raideur matériau	N/m
$\underline{\underline{\sigma}}$	contraintes	Pa	$\underline{r}$	résidu	N
$\underline{d}$	vecteur nodal	–	$\underline{\underline{T}}_{\sigma}$	tenseur de passage vers la base des contraintes principales	–
$\underline{\underline{E}}$	tenseur d'élasticité d'ordre 2	Pa	$\underline{\underline{T}}_{\varepsilon}$	tenseur de passage vers la base des déformations principales	–
$\underline{\underline{E}}$	opérateur de Green-Lagrange	–)	$\underline{u}$	tenseur des déplacement	m
$\mathbb{E}$	tenseur d'élasticité d'ordre 4	Pa			
$\underline{f}$	effort	N			
$\underline{g}$	accélération de la pesanteur	m/s <sup>2</sup>			

## Accents, Opérateurs et Fonctions

Sym.	Signification	Sym.	Signification
$\dot{\square}$	dérivée particulière	$\mathcal{J}$	fonctionnelle d'énergie potentielle
$\hat{\square}$	quantité virtuelle	$\mathcal{P}$	contrainte de pilotage
$\check{\square}$	quantité approchée	$\mathbb{N}$	ensemble des naturels
$\tilde{\square}$	facteur d'échelle	$\mathbb{R}$	ensemble des réels
$\{\dots\}$	ensemble (éventuellement ordonné)	$\Delta \square$	différence finie
$[1, n]$	intervalle dans $\mathbb{R}$	$D_{\blacksquare} \square$	différentiation ( $\frac{d\square}{d\blacksquare}$ )
$\llbracket 1, n \rrbracket$	intervalle dans $\mathbb{N}$	$\square_{\blacksquare}$	différentielle partielle ( $\frac{\partial \square}{\partial \blacksquare}$ )
$ \square $	valeur absolue	$\nabla \square$	gradient
$\ \square\ $	norme euclidienne	$\nabla \cdot \square$	divergent
$\langle \square \rangle_+$	partie positive	$\nabla^2 \square$	laplacien
$\langle \square \rangle_-$	partie négative	$\nabla^4 \square$	opérateur biharmonique
$\square \equiv \blacksquare$	identiquement égal	$\square \times \blacksquare$	produit de hadamard
$\delta_{ij}$	kronecker	$\square \otimes \blacksquare$	produit tensoriel
$\mathcal{E}$	fonction erreur	$\square \cdot \blacksquare$	produit contracté simple
$\mathbf{F}$	transformation en grands déplacements	$\square : \blacksquare$	produit contracté double
$\mathcal{F}$	fonction itérative	$\square^t$	transposition
$\mathcal{I}$	fonction indicatrice		

## Indices et Exposants

Sym.	Signification	Sym.	Signification
$\square_{[\alpha,\beta]}$	direction planes -x, -y	$\square^+$	supérieure
$\square_{[I,II,III]}$	direction principales	$\square^-$	inférieure
$\square_{[x,y,z]}$	direction spatiales -x, -y, -z	$\square^\circ$	plan moyen
$\square_a$	acier	$\square^*$	référence
$\square_{adh}$	adhérent	$\square^\theta$	sous-système thermique (couplage)
$\square_{air}$	air	$\square^{bh}$	bande horizontale
$\square_{ana}$	analytique	$\square^{bv}$	bande verticale
$\square_b$	béton	$\square^{cp}$	compression
$\square_c$	chaud	$\square^e$	élastique
$\square_{crit}$	critique	$\square^{el}$	élément
$\square_{corr}$	correction	$\square^{eq}$	équivalent
$\square_{cste}$	part constante	$\square^{ext}$	extérieur
$\square_{eff}$	efficace	$\square^{fiss}$	fissuré
$\square_{exp}$	expérimental	$\square^{fl}$	flexion
$\square_g$	connecteur	$\square^{gl}$	global
$\square_H$	homogène	$\square^i$	itération $i$ (méthode de Newton)
$\square_{fem}$	numérique	$\square^{imp}$	imposé
$\square_i$	incrément $i$ (méthode de Newton)	$\square^{int}$	intérieur
$\square_{ipb}$	interface plaque-béton	$\square^l$	limite
$\square_k$	caractéristique	$\square^{lo}$	local
$\square_{Maz}$	Mazars	$\square^{max}$	maximum
$\square_n$	normal	$\square^{no}$	nœuds
$\square_{no}$	nominal	$\square^{pl}$	plastique
$\square_p$	plaque	$\square^{pred}$	prédictif
$\square_r$	résiduel	$\square^S$	spring (conditions limites)
$\square_{ref}$	référence	$\square^{th}$	thermique
$\square_{Rd}$	résistant	$\square^{tot}$	total
$\square_{seuil}$	seuil	$\square^{tr}$	traction
$\square_{sh}$	cisaillement	$\square^u$	sous-système mécanique (couplage)
$\square_t$	tangent		
$\square_u$	ultime		
$\square_{var}$	part variable		
$\square_{vMis}$	von Mises		
$\square_y$	plastification (yield)		



# Introduction

Selon l'ensemble des prévisions, la demande mondiale d'énergie augmentera considérablement dans les cinquante prochaines années par rapport à la consommation actuelle [Conti *et al.*, 2013]. Ce besoin sera essentiellement le fait de pays qui ont aujourd'hui une consommation faible mais dont le développement et l'intégration dans l'économie mondiale connaissent une forte accélération.

Concilier la production d'une quantité suffisante d'énergie avec la maîtrise de l'environnement et le développement social constitue un nouveau défi que doit relever l'ensemble des acteurs politiques, économiques et techniques.

Bien qu'au sein des sociétés l'énergie nucléaire apparaisse comme l'une des sources d'énergie les plus controversée du fait de sa complexité, il s'agit d'une solution vers laquelle se tournent certains pays à forte croissance économique. Ces pays présentent, à l'image de l'Inde ou de la Chine, des exigences bien spécifiques. Leur croissance rapide associée à des réseaux de distribution inadaptés aux centrales de forte puissance comme l'EPR amènent les opérateurs du nucléaire, dont EDF, à repenser leur offre.

Les réponses à ces nouveaux appels d'offre s'orientent alors vers la construction de centrales de moyenne puissance s'appuyant sur une forte modularité pour être réalisées dans des délais brefs [Liu et Fan, 2014].

Ces nouveaux enjeux économiques s'accompagnent toujours d'exigences de fonctionnement élevées pour garantir la sûreté des installations nucléaires et maintenir la confiance de l'opinion publique. En particulier, dans le Génie Civil, les structures et éléments importants pour la protection (**EIP**) doivent faire preuve de stabilité, de résistance et d'intégrité. A cet égard, de nombreux cas accidentels sont envisagés lors de la conception des infrastructures. Ces derniers incluent notamment les risques sismiques, incendiaires, d'impacts ou encore des accidents plus spécifiques à l'industrie nucléaire tels que l'accident grave.

Si les solutions classiques de construction en béton armé parviennent à répondre à ces exigences croissantes, de véritables défis en terme de constructibilité apparaissent avec des infrastructures toujours plus complexes à bâtir, ce qui se traduit par des coûts élevés.

C'est pourquoi de nouveaux procédés constructifs se développent. Parmi eux, la construction modulaire préfabriquée à l'aide d'éléments sandwichs se distingue. Ces structures sont constituées de deux plaques externes métalliques et d'un matériau de remplissage moins dense (béton).

Depuis une dizaine d'années, les recherches concernant cette nouvelle technologie prennent leur essor à l'étranger, en particulier en Asie (Corée, Japon) et plus récemment aux Etats-Unis. Ces recherches ont démontré la viabilité économique de ces éléments compos-

ites acier-béton et en ont souligné les intéressantes propriétés mécaniques de résistance, stabilité et étanchéité, malgré un coût accru des contrôles et inspections à réaliser (notamment sur les soudures) et de moindres performances face aux agressions externes.

Les études réalisées ont abouti à de premiers guides de conception japonais [JEA, 2012], coréen [KEPI, 2009] et américain [AISC, 2012] qui visent désormais à intégrer les spécificités propres à l'industrie nucléaire.

Dans ce contexte, le projet européen SCIENCE lancé en 2013 propose de construire un référentiel normatif intégré au paysage de la construction européenne pour cette nouvelle technologie que nous nommerons éléments **SC** par la suite. De nombreuses sociétés et laboratoires universitaires interviennent dans ce projet, dont EDF, en charge avec ses partenaires académiques (LMT, IRC et KIT) de l'étude du comportement aux températures accidentelles en centrales nucléaires, de l'ordre de 200°C.

C'est en périphérie de ce projet de recherche que s'inscrivent les travaux menés dans le cadre de cette thèse. Ainsi, notre objectif initial consiste à caractériser le comportement thermomécanique des éléments SC pour des températures proches de 200°C, susceptibles d'être rencontrées en cas accidentels.

La réponse que nous proposons à la problématique posée s'articule en quatre temps faisant chacun l'objet d'un chapitre. Après avoir identifié les manques dans la réglementation existante, nous nous orienterons vers le problème spécifique du voilement thermique. Nous nous appuierons alors sur des études numériques et théoriques afin de proposer une méthodologie simplifiée de vérification du voilement thermique, adaptée à l'ingénierie de conception. Cette solution sera confrontée aux résultats expérimentaux d'une campagne d'essai que nous concevrons.

Le chapitre I de cette thèse correspond à un état de l'art portant sur cette nouveauté technologique. A travers la description de la technologie constructive et de ses variantes, nous en présenterons les applications constructives que l'on positionnera en perspectives de l'industrie nucléaire et de ses spécificités. Nous justifierons ainsi l'engouement nouvellement suscité par ces structures composites tant dans les milieux académiques qu'industriels.

A l'occasion de ce premier chapitre, nous dresserons un panorama aussi exhaustif que possible des résultats issus des recherches accomplies et des recommandations qui en résultent dans les guides établis à l'étranger. Nous nous intéresserons tant aux comportements à température ambiante qu'aux hautes températures. Nous identifierons alors un manque d'informations relatives aux comportements aux températures intermédiaires que constituent les cas accidentels en centrales nucléaires. Ainsi, la problématique du voilement des plaques externes induit par la thermique, pourtant observé expérimentalement [Sekimoto et Kondo, 2001] apparaît être très peu documentée et étudiée. L'absence d'études approfondies s'expliquent par le caractère novateur des applications qui souhaitent être faites de ces éléments de construction modulaire dans le milieu nucléaire. C'est donc vers la caractérisation et la prévention de ce phénomène que nous avons dirigé nos études.

L'étude du voilement thermique que nous proposons dans nos travaux s'appuie fortement sur l'outil numérique. Nous justifierons alors dans le chapitre II et ses annexes A, B et C les hypothèses effectuées dans les modèles éléments finis. En particulier, nous montrerons que le problème de voilement spécifique aux éléments modulaires ne saurait être traité à

l'aide des techniques conventionnelles d'analyse de stabilité, mais nécessite une représentation non-linéaire du phénomène. Nous reviendrons à cet égard sur la modélisation des comportements matériaux et des interfaces. Nous insisterons enfin sur les méthodes de couplage thermomécaniques.

Les modèles numériques ainsi développés seront exploités dans le chapitre III. Dans ce dernier, nous réaliserons des études de criblage et de sensibilité afin d'identifier les paramètres pertinents du problème de voilement thermique et d'en cerner leur effet au niveau local de la maille élémentaire délimitée par quatre connecteurs. Nous nous pencherons également sur le couplage plasticité-voilement.

A partir de ces informations et de la théorie des plaques minces de Föppl - von Kármán, nous construirons un modèle analytique théorique du phénomène de voilement thermique que nous validerons sur les résultats des calculs éléments finis. Les détails et planches de calculs seront fournis en annexe D. Nous procéderons alors à des hypothèses simplificatrices pour dégager une méthode de conception simplifiée, adaptée à l'ingénierie. Nous illustrerons finalement cette méthode d'un cas exemple.

Enfin le dernier chapitre, IV, de cette thèse sera consacré à l'étude expérimentale du phénomène de voilement local. Nous définirons les spécimens testés à partir des considérations issues d'une analyse dimensionnelle. Nous proposerons alors un essai au protocole original dans lequel nous exploiterons les méthodes récentes d'acquisition par stéréocorrélation. Les résultats expérimentaux seront finalement confrontés aux données calculées avec les modèles numériques et analytiques, à des fins de validation.



# Chapitre I

## Contexte industriel et technologique

*Dans ce premier chapitre, nous décrirons la nouveauté technologique étudiée et ses possibles applications nucléaires. A partir de l'étude des modes de ruines spécifiques, nous dresserons un état de l'art des recommandations établies pour le dimensionnement à température ambiante et élevée. Nous identifierons alors les enjeux techniques et scientifiques faisant l'objet des travaux présentés.*

### Sommaire

<b>1</b>	<b>Description de la technologie . . . . .</b>	<b>6</b>
1.1	Solution constructive et variante . . . . .	7
1.2	Viabilité économique de la construction modulaire . . . . .	12
1.3	Application au génie civil nucléaire . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Comportement mécanique à température ambiante . . . . .</b>	<b>17</b>
2.1	Réponse en flexion . . . . .	18
2.2	Résistance au cisaillement . . . . .	22
2.3	Voilement local de la plaque d'acier comprimée . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Comportement mécanique à température élevée . . . . .</b>	<b>31</b>
3.1	Comportement à l'incendie . . . . .	31
3.2	Comportement à température modérée . . . . .	37



## Introduction au chapitre I

L'accroissement des besoins énergétiques des pays à forte croissance économiques tels que l'Inde ou la Chine les a amené à considérer l'énergie nucléaire comme alternative aux centrales thermiques. Pour répondre aux exigences spécifiques de ces pays (réseaux de distribution limités par leur capacité, délais de constructions brefs, sûreté), les principaux acteurs du nucléaire s'orientent vers des offres intégrant désormais de plus en plus de modularité comme solution constructive de base [Liu et Fan, 2014].

Les éléments SC conçus comme des composites "sandwiches" acier - béton munis de deux plaques externes en acier placées en parement d'un cœur béton sont un exemple de procédé de construction novateur. Cette technologie permet, par sa conception, des chantiers très modulaires avec des éléments préfabriqués. En dépit des difficultés inhérentes à sa conception (vulnérabilité aux agressions externes, nombre important de soudures lors de l'assemblage, inaccessibilité au béton), nous verrons dans ce chapitre que ces structures disposent d'excellentes propriétés de résistance mécanique grâce leur importante ductilité et de stabilité suite à l'externalisation des plaques en acier. A ces atouts, il faut intégrer une garantie de l'étanchéité de la structure, attrayante vis à vis des besoins de confinements spécifiques à l'industrie du nucléaire.

Si à l'heure actuelle, il n'existe pas de codification propre au nucléaire autorisant leur utilisation, nous verrons que ces structures offrent des perspectives nouvelles à la recherche.

Le présent chapitre a deux objectifs. Dans un premier temps, il s'agit de présenter la nouveauté technologique que constituent les éléments de constructions modulaires (i). Le produit sera étudié comme solution constructive marquant une rupture avec les schémas classiques de construction. Nous nous intéresserons alors aux possibles applications nucléaires et aux exigences particulières requises par une telle utilisation de la technologie. Par la suite, il conviendra de se familiariser avec le comportement mécanique de la technologie (ii). Au travers de la prévention de ses modes de ruines spécifiques à température ambiante ou élevée, nous détaillerons les recommandations existantes et évaluerons les incertitudes à étudier.

L'ensemble de ces informations nous permettra d'identifier les manques dans les réglementations actuelles à partir desquels nous orienterons nos travaux.

## 1 Description de la technologie

Cette partie se présente comme une introduction à la nouveauté technologique que l'actuel travail de thèse étudiera dans la suite. Nous reviendrons pour commencer sur la conception des éléments modulaires SC. Cette description sera l'occasion d'aborder la question des propriétés des matériaux constitutifs de l'élément. Ensuite nous exposerons l'intérêt nouveau suscité par cette technologie pour sa viabilité comme solution constructive. Pour finir, nous mettrons en perspective l'utilisation des éléments de construction modulaire dans le champ du génie civil nucléaire.

## 1.1 Solution constructive et variante

Les premières recherches portant sur des éléments SCs datent de 1976. Ces éléments étaient alors constitués uniquement d'un cœur béton muni de deux plaques d'acier collaborantes. La liaison acier béton était alors réalisée à l'aide d'une résine époxy [Solomon *et al.*, 1976]. Le comportement de ce type d'éléments s'apparentait à celui des poutres en béton armé classique, en l'absence d'épingles pour reprendre le cisaillement transversal. Bien que la technique ait évolué, des travaux de recherche continuent à être menés pour l'élaboration de mortiers haute résistance. L'emploi de ces derniers assure une liaison acier-béton aux propriétés de résistance mécanique et d'adhérence suffisantes pour qu'ils soient appliqués aux ponts mixtes [Thomann, 2005].

Cependant, en l'absence de connecteurs, le mode de ruine prépondérant reste la rupture du béton en cisaillement, dont la résistance ultime ( $Q_{bu}$ ) peut être estimée à partir de la formule suivante, fournie dans le système **SI**, par le guide **ACI-349** [ACI, 2007] :

$$Q_{bu} = l_y t_b \left( 0.16 \sqrt{\sigma_{bk}^{cp}} + 17.2 \rho_a \frac{Q t_b}{M} \right) \quad (1.1)$$

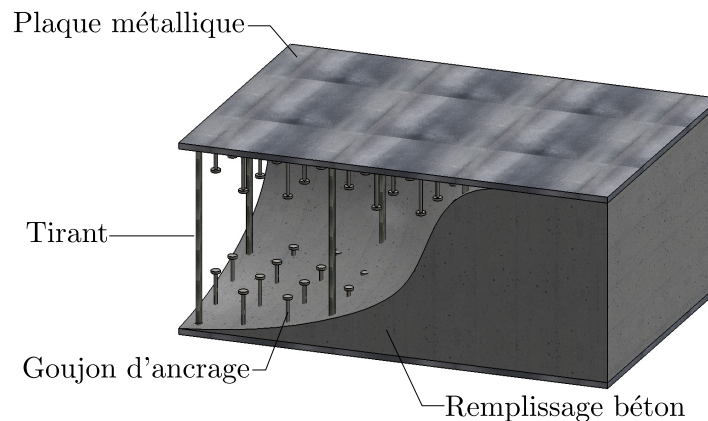
Avec  $l_y$  la largeur de la poutre considérée,  $t_b$  l'épaisseur du remplissage béton et  $\rho_a = \frac{A_a}{l_y t_b}$  où  $A_a$  est la section d'acier de la peau métallique et  $\sigma_{bk}^{cp}$  la résistance à la compression du béton.

Afin de palier les défauts constatés des structures sandwichs, la conception des éléments SCs fut améliorée en introduisant, en 1986, des goujons comme connecteurs [Burgan, 2011]. L'introduction d'éléments transverses répond à deux besoins : premièrement, ils assurent le développement d'actions composites à l'interface acier-béton en améliorant le transfert de contrainte d'un matériau à l'autre ; ensuite, ils ont pour objectif de restreindre les déplacements de l'acier par rapport au béton, et plus spécifiquement d'empêcher toute séparation verticale. Nous verrons par la suite au paragraphe 2.3 que les critères mécaniques de flambement sont fortement corrélés à l'espacement de ces connecteurs.

Les données issues des expériences réalisées par Oduyemi et Wright ont fourni les fondements de la compréhension du comportement mécanique des structures SCs [Oduyemi et Wright, 1989, Burgan, 1997]. Depuis, de nombreuses autres expériences ont été réalisées permettant d'évaluer les modes de ruines dominants. Ceux-ci comportent notamment la plastification de la plaque d'acier tendu, la décohésion entre acier et béton s'accompagnant de glissement et la ruine du béton cisailé [Wright *et al.*, 1991, Roberts et Dogan, 1995]. C'est ainsi que l'Institut de construction métallique anglaise (SCI) propose un premier guide de conception pour les SCs [Narayanan *et al.*, 1994].

Finalement c'est en 1998 qu'est réalisée l'innovation permettant de remédier aux difficultés de construction in-situ spécifiques aux structures SCs. En effet, British Steel (plus tard Corus) [Bowerman et Burgan, 1995] met au point une technique de préfabrication pour son produit Bi-steel, dans laquelle un connecteur traversant (que nous nommerons tirant<sup>1</sup>) est soudé par friction à chacune de ses extrémités aux plaques d'acier (voir figure 1.1).

1. ce qui correspond à la traduction littérale du terme "tie-bar" utilisé dans la littérature anglo-saxonne.



**FIGURE 1.1:** Description d'un panneau en élément SC

Ce tirant permet, d'une part, de s'opposer à la poussée hydrostatique du béton afin de maintenir la forme du panneau. D'autre part, il accroît la résistance du panneau au cisaillement et améliore le transfert des contraintes aux interfaces acier-béton. Par ailleurs ces panneaux peuvent être plans ou courbes, présentant alors un rayon de courbure minimal de 1500mm.

Actuellement, les éléments modulaires présentent de nombreuses déclinaisons. De nombreuses variantes sur les connecteurs ont été développées et feront l'objet du paragraphe 1.1.3. Toutefois, La technologie de référence proposée par les guides de conception américain (**AISC-690**) [AISC, 2012], coréen (**KEPIC-SNG**) [KEPI, 2009] et japonais (**JEAC-4618**) [JEA, 2012], dérive de la solution *Bi-steel* [Xie et Chapman, 2006]. Elle fait intervenir des connecteurs de type tirants et des connecteurs de type goujons. Les premiers assurent tout particulièrement le maintien de la structure, tandis que les secondes (qui peuvent se recouvrir) assurent la reprise du cisaillement et les transferts des efforts entre acier et béton.

### 1.1.1 Remplissage Béton

Peu de prescriptions sont fournies par les guides de conception sur la nature du béton préconisé pour les éléments modulaires, tant au regard de la formulation que des propriétés du matériau, ce qui permet de conserver une formulation avec une maniabilité classique.

Sur des chantiers tels que l'EPR de Flamanville, les densités d'acier rencontrées peuvent être très importantes ( $450\text{kg/m}^3$ ). Lors de la mise en œuvre du béton, combler les interstices entre armatures se révèle parfois délicat et se traduit par l'apparition de vides et de reprises locales. Cette difficulté ne devrait pas se produire pour les SCs compte tenu de l'absence des barres d'armature de renfort passif. Toutefois, dans le cadre des éléments modulaires, la mise en place du béton requiert des précautions particulières. Ainsi, des réservations peuvent être prévues pour s'assurer de la propreté de l'intérieur du coffrage métallique mais il est nécessaire de les fermer pour restaurer les caractéristiques mécaniques de l'élément. Ensuite, la quantité importante de connecteurs et les dimensions des éléments suggèrent l'emploi de bétons fluides. Cependant, vis à vis de la problématique de la corrosion, le KEPIC-SNG

recommande d'éviter la présence d'eau libre au contact des parois du coffrage. Ces recommandations semblent orienter le choix de la formulation vers des solutions de bétons auto-plaçants. Après la mise en œuvre du matériau, les guides préconisent des contrôles par ultrasons ou ondes sonores pour vérifier la qualité du coulage, difficilement exploitables en pratique notamment à cause des défaut d'adhérence.

Vis à vis des propriétés mécaniques du béton, les recommandations existantes s'accordent à donner des bornes inférieures et supérieures de la résistance à la compression. Les documentations européennes dont le **SCI-P131** [Narayanan *et al.*, 1994] et le guide de conception (**CORUS**) du produit *Bi-steel* [Bowerman *et al.*, 2003] se réfèrent à l'Eurocode 2 (**EN-1992**) [CEN, 2004a] et proposent des bétons de résistance caractéristique à la compression minimale C16/20 et maximale C50/60. Les américains dans l'ACI-349 privilégient des bétons dont les résistances sont comprises entre 24 MPa et 42 MPa tandis que les japonais avec le JEAC-4618

conseillent des bétons standards dont la résistance à la compression est comprise entre 21 MPa et 36 MPa. Il est intéressant de constater que la résistance minimale autorisée par les différents guides correspond entre eux, tandis qu'une variation plus nette de la limite supérieure est observable.

Dans le cadre d'une application pour le nucléaire, la question du vieillissement doit être étudiée. Les auteurs de [Burgan et Eleftherios, 2014]

pointent l'absence de retour d'expérience sur la question du vieillissement. On peut néanmoins citer le SCI-P131 anglais qui propose de tenir compte d'un module sécant dégradé  $E_{cm}/3$  pour tenir compte des problématiques de fluage et de se référer à l'Eurocode 2 pour le retrait. On citera également le guide japonais du JEAC-4618 qui minimise l'impact du retrait par dessiccation, négligé à cause de l'étanchéité induite par les plaques extérieures en acier. Enfin, très peu de variations ont été proposées quant à la nature du remplissage (utilisation de béton fibré par exemple). Certains auteurs s'intéressent néanmoins à l'utilisation de bétons légers (densité inférieure à 1450 kg/m<sup>3</sup>), en s'inspirant de l'industrie navale [Ollgaard *et al.*, 1971, Sohel et Liew, 2011] pour réduire l'épaisseur des plaques en acier en limitant la pression hydrostatique lors du coulage.

### 1.1.2 Plaques en acier

Selon les auteurs de [Burgan et Eleftherios, 2014], il n'existe pas dans la littérature d'obligations spécifiques relativement à l'acier utilisé pour les plaques des modules SCs. Ils mentionnent toutefois que les guides de conceptions européens préconisent la conformité aux directives de l'Eurocode 3 (**EN-1993**) [CEN, 2005a], l'acier utilisé devant être issu de produits laminés à chaud.

La table 1.1 montre les correspondances dans les recommandations pour les caractéristiques de l'acier. Ainsi, les guides suggèrent l'utilisation d'un acier dont la limite d'élasticité ( $\sigma_y$ ) est élevée. Cette précaution rend négligeables les contraintes résiduelles issues du chauffage de l'acier lors de son laminage [Malushte et Varma, 2010]. La valeur de  $\sigma_y$  doit toutefois permettre de souder les panneaux lors de l'assemblage de modules élémentaires. Les différents guides cités précédemment s'accordent à proposer des épaisseurs minimales

et maximales d'acier.

**TABLE 1.1:** Limite élastique ( $\text{N/mm}^2$ ) de l'acier proposée dans la littérature

Guide	Type		Limite d'élasticité ( $\sigma_y$ )	
	Ref.	Application		
ACI-349		Usage général	250	
SCI-P131	S275	Usage général	$t_p \leq 40 \text{ mm}$	$40 \leq t_p \leq 100 \text{ mm}$
	S355		275	255
			355	335
KEPIC-SNG	SS400	Usage général	$t_p \leq 6 \text{ mm}$	$t_p \leq 22 \text{ mm}$
			235	X
	STK400	Laminé à froid	X	235
	SPAR400		X	295
	STK490		X	325
CORUS	S275	Non structurel	275	
	S355	Usage général	355	
JEAC-4618	SS400	Structurel	$t_p \leq 40 \text{ mm}$	$40 \leq t_p \leq 100 \text{ mm}$
	SS490		235	215
			275	255
	SM400	Structures soudées	235	215
	SCW490		315	315
	SM490		325	295
	SCW520		355	355
	SN400	Bâtiment	235	215
	SN490		325	295

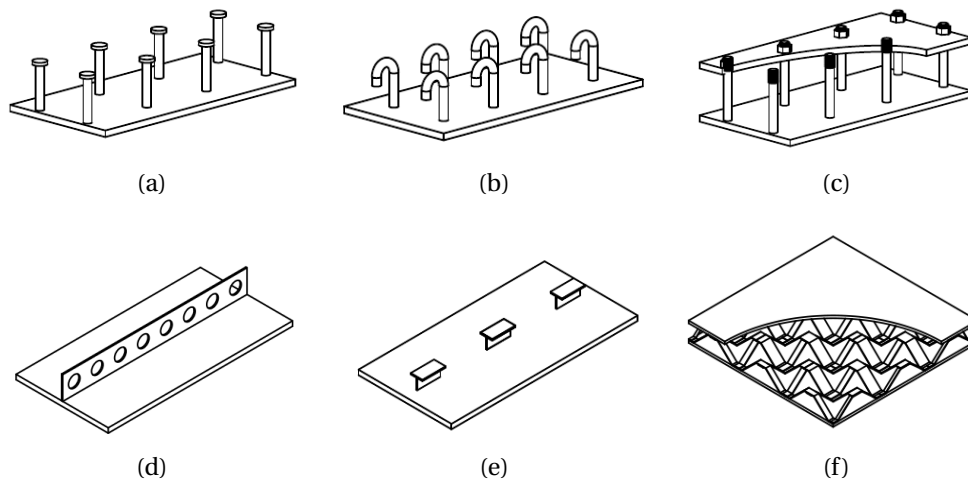
Ainsi pour des usages normaux, l'intervalle suggéré est  $t_p \in [3.2, 40 \text{ mm}]$ , avec  $t_p \geq 6 \text{ mm}$  si l'épaisseur du remplissage béton est telle que  $t_b \geq 450 \text{ mm}$ . Cette dernière borne inférieure étant liée au maintien de la forme du panneau lors du bétonnage, comme ont pu le montrer les études réalisées par [Tuscher et Shaparevich, 2014] sur un cas test de Diesel Ultime Secours.

### 1.1.3 Connecteurs

Les connecteurs les plus communément rencontrés dans la littérature sont les goujons types Nelson qui peuvent être utilisés conjointement aux connecteurs types tirants introduits lors de la conception des panneaux bi-steel. Les premiers assurent le transfert des contraintes axiales et du cisaillement entre plaques et béton, tandis que les seconds permettent

en plus de maintenir la forme du panneau lors du bétonnage ou des opérations de manutention.

De nombreuses variantes sur les connecteurs sont présentées dans la littérature. Les travaux de [Liew et Sohail, 2009] se sont focalisés sur les "*J-hook connectors*". Tandis que [Leekitwattana, 2011] dresse un inventaire plus exhaustif illustré par la figure 1.2. Il cite notamment les plaques de partitions (éventuellement évidées : perfobonds), les raidisseurs membranaires (poutres en I, cornières...) ou encore les profils ondulés sur lesquels portent des brevets [Ray, 1996].



**FIGURE 1.2:** Connecteurs pour SCs : goujons (a), connecteurs en J (b), tirants boulonnés (c), perfobonds (d), connecteurs en T (e), profilés ondulés croisés (f) [Leekitwattana, 2011]

Il est à noter qu'aucun des guides de conception cités précédemment ne présente ces alternatives, se concentrant sur la conception classique goujonnée. SCI-P131 [Narayanan *et al.*, 1994] rappelle que grâce à leur tête, les goujons d'ancrage établissent la meilleure connexion entre plaque et béton. La tête d'ancrage contrebalance les efforts repris par le connecteur pouvant provoquer son arrachement. Le dimensionnement des connecteurs peut s'inspirer des recommandations de l'Eurocode 4 (**EN-1994**) [CEN, 2004c] mais doit tenir compte de la variabilité de la résistance du connecteur selon qu'il travaille dans une zone tendue ou comprimée, d'une résistance caractéristique assurant moins de 5% de ruines d'une population homogène de connecteurs lors des essais de caractérisations, du dimensionnement conforme aux critères de résistance mécanique et d'allongement à rupture. Pour finir, des recommandations de dimensions sont fournies par les guides asiatiques. Le KEPIC-SNG spécifie des diamètres compris entre 13 et 22mm, tandis que le JEAC-4618 suggère de considérer environ 3 fois l'épaisseur de la plaque (voir table 1.2).

**Nous considérerons dans nos études le produit classique constitué des plaques, des connecteurs goujons et tirants en acier S235, d'un remplissage béton C30/35.**

TABLE 1.2: Diamètre maximal standard des goudons prescrits par le JEAC-4618

Épaisseur de la plaque d'acier $t_p$ (mm)	3.2	4.5	6	9	12
Diamètre goudon $\varnothing_g$ (mm)	9	13	16	22	25

## 1.2 Viabilité économique de la construction modulaire

L'utilisation de cette nouvelle solution constructive pour un chantier implique de profondes modifications de l'organisation du travail qui posent la question de sa viabilité comparativement à des procédés plus classiques.

### 1.2.1 Étude de faisabilité

Des études de faisabilité [Ijichi *et al.*, 2002, Crosbie *et al.*, 2004] ont été réalisées afin de mieux appréhender les nouvelles procédures induites par l'utilisation d'éléments composites acier-béton. Ces travaux se sont placés en perspective de la modularisation du processus de construction. En particulier, les délais du chantier, les coûts des matériaux et de la main d'œuvre ont été comparés pour deux chantiers fictifs de réacteurs à eau bouillante (ABWR), l'un construit à l'aide des SC, l'autre suivant un procédé classique [Kaneuji *et al.*, 1989].

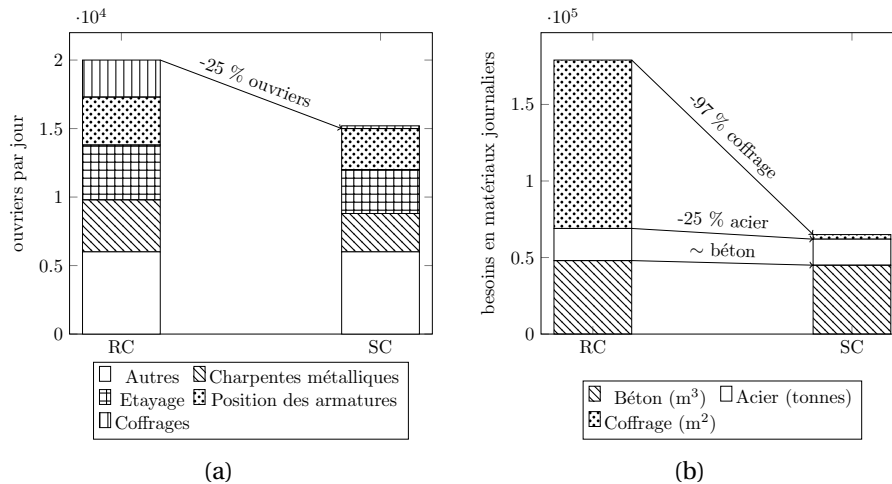
Selon l'étude réalisée par [Burgan et Eleftherios, 2014], à conception comparable entre éléments SC et béton armé (RC), le volume d'acier nécessaire dans l'approche SC est réduite d'environ 25 %. Par ailleurs, les possibilités offertes par la préfabrication entraînent une diminution du nombre d'ouvriers in-situ de 30 % ce qui se traduit également par un gain relativement à la sécurité. Les auteurs de [Schlaseman et Jeffery, 2004] résument ces données dans les graphes présentés par la figure 1.3. Cependant, les chercheurs rappellent que l'usage de plaques étant plus onéreux que celui de barres d'armature, l'économie matérielle est à relativiser. Par ailleurs, la préfabrication hors-site entraîne des coûts et des difficultés propres à la livraison de volumes importants, ce qui n'a pas fait l'objet d'études poussées.

Les travaux de [Kato *et al.*, 2011] précisent que l'organisation spatiale du chantier est également modifiée par l'utilisation de cette technologie. Des opérations de terrassement doivent être réalisées pour les chemins de manutention des vireurs et grues lourdes. Des aires dédiées au stockage doivent également être prévues, un chantier très étroit peut alors conduire à des difficultés de mises en œuvre.

Plus que sur les aspects approvisionnement et logistique, c'est sur le phasage des travaux que l'impact du choix SC est le plus marqué.

### 1.2.2 Phasage du chantier

L'emploi de SC lors de la conception d'une structure facilite la construction de cette dernière. En effet, la préfabrication en atelier permet, d'une part, de réduire le nombre de tâches à effectuer, et permet d'autre part de diminuer la quantité de soutènements temporaires. Ainsi selon le rapport établi par [Condu, 2004], l'utilisation de SC permet de s'affranchir des étapes de mise en place des armatures et de décoffrage. En revanche, l'assem-



**FIGURE 1.3:** Comparaison des besoins journaliers en ouvriers sur site (a) et de la quantité de matériaux (b) entre RC et SC [Schlaseman et Jeffery, 2004]

blage des panneaux SC à la grue lourde requiert une durée plus longue que la seule mise en place du coffrage pour les RC. Le gain de temps final s'évaluerait à 2 à 5 mois selon les diverses études précédemment citées [Takeuchi *et al.*, 1998, Schlaseman et Jeffery, 2004].

Cependant, l'utilisation de SC impacte profondément le phasage du travail en amont du chantier. Il est en effet nécessaire que les études soient achevées et ceci pour la totalité de la structure. Une fois les panneaux modulaires en place, la structure est peu adaptable à d'éventuelles modifications. La maîtrise de la logistique (transports, manutention, tests et contrôles des soudures) peut également être source de difficultés ce qui se traduit par un besoin de coordination important entre les différents corps de métier. L'utilisation de vireurs aux grues lourdes peut se traduire par un gain de temps d'environ 10% selon [Katoh *et al.*, 2011]. Il convient cependant d'être vigilant au clavage entre modules qui conduit à des tolérances de poses parfois drastiques.

Enfin, les finitions pour les SC structures ainsi que la mise en place de l'équipement sont grandement facilitées par rapport aux structures RC [Kaneuji *et al.*, 1989]. Les SC offrent la possibilité d'avoir des points d'appui pour les équipements en tous lieux de la surface. En revanche, en RC, les équipements requièrent l'installation de platines d'ancrage ou de chevilles (près de 90 000 dans une centrale nucléaire) dont l'installation d'un élément peut prendre plusieurs heures.

En conclusion, l'accélération du chantier est permise par une forte modularisation qui comprend une préfabrication lourde et une co-ingénierie importante : les organes de fonctionnement (tuyauteries) pouvant être soudés aux panneaux, parfois même avant assemblage. A travers cette introduction aux problématiques propres à la gestion et à la qualification de la conception modulaire, la solution SC apparaît comme viable. Ce dernier point justifie l'intérêt croissant que lui porte la communauté internationale.



### 1.3 Application au génie civil nucléaire

Ce type de construction est soit déjà utilisé, soit connu ou en cours de développement par les grands acteurs du Nucléaire dans le monde : Japon, Corée du Sud, Chine, USA, Canada. Comme exemples faisant intervenir des éléments SC, on pourra citer tout particulièrement la centrale de traitements de déchets de Kashiwazaki-Kariwa [Niousha *et al.*, 2007] ou le réacteur AP1000 de Westinghouse, fortement modularisé [Schulz, 2006, Sutharshan *et al.*, 2011].

Si l'on en croit l'analyse effectuée par le Département américain de l'Énergie, le besoin mondial énergétique devrait s'accroître de 50% dans les 30 prochaines années [Conti *et al.*, 2013]. En particulier, l'ouverture des marchés en Chine et en Inde, oriente les réponses aux appels d'offres vers la conception de réacteurs de moyennes puissances pouvant être livrés dans de brefs délais. Ces **SMR** (Small Modular Reactor) s'orientent vers une conception modulaire globale [Liu et Fan, 2014]. Par ailleurs, d'autres solutions de Réacteurs à neutrons rapides refroidis au sodium (**SFR**) sont à l'étude, pour lesquels l'étanchéité procurée par le coffrage métallique devient un avantage substantiel en prévision des accidents de feu de sodium<sup>2</sup>.

L'étude réalisée par [Takeuchi *et al.*, 1998] présente dans son introduction un rapide descriptif de l'emploi des assemblages de modules élémentaires comme système structurel, reprise et complétée par le JEAC-4618.

#### 1.3.1 Solution constructive

Lorsque les panneaux SC sont utilisés comme voile (figure 1.4a, les modules utilisés prennent l'apparence de la solution classique présentée par la figure 1.1. Selon [Takeuchi *et al.*, 1998, Xie *et al.*, 2004], l'espacement moyen entre deux tirants est de l'ordre de 200 mm.

Dans le cas particulier des murs de contreventement, la conception des assemblages doit tenir compte du séisme. Cette contrainte se traduit par de nombreuses soudures lors de l'assemblage des panneaux, ce qui nécessite d'avoir laissé au béton un temps de cure suffisant pour éviter l'écaillage ou la fissuration de ce dernier [Burgan et Eleftherios, 2014].

Les liaisons avec les planchers ou toitures sont assurées par des barres en acier, tandis que les goudjons peuvent assurer le rôle de boulons d'ancrage. Des raidisseurs peuvent également être prévus pour augmenter la raideur du mur dans certains cas particuliers tels que le dimensionnement à l'incendie.

Dans le cadre de leur utilisation pour des planchers, le JEAC-4618 privilégie l'emploi d'un demi-module (figure 1.4c). Ce dernier est constitué d'une plaque en acier pour la face inférieure et d'une nappe d'armatures type béton armé pour la face supérieure. En effet, ce choix facilite les finitions (aspect de surface) et le placement des ancrages pour assurer les liaisons avec les murs voisins, les poutrelles ou tout autre élément structurel. Des raidisseurs en face inférieure sont prévus afin de maintenir la forme du panneau lors de sa confection.

---

2. Rappelons que pour les SFRs, le modérateur est absent et le système est refroidi au sodium liquide. En cas d'accident de fuite du liquide de refroidissement, l'isolation de l'eau contenue dans le béton par la peau métallique permet de ne pas entretenir l'incendie [Couturier, 2012]

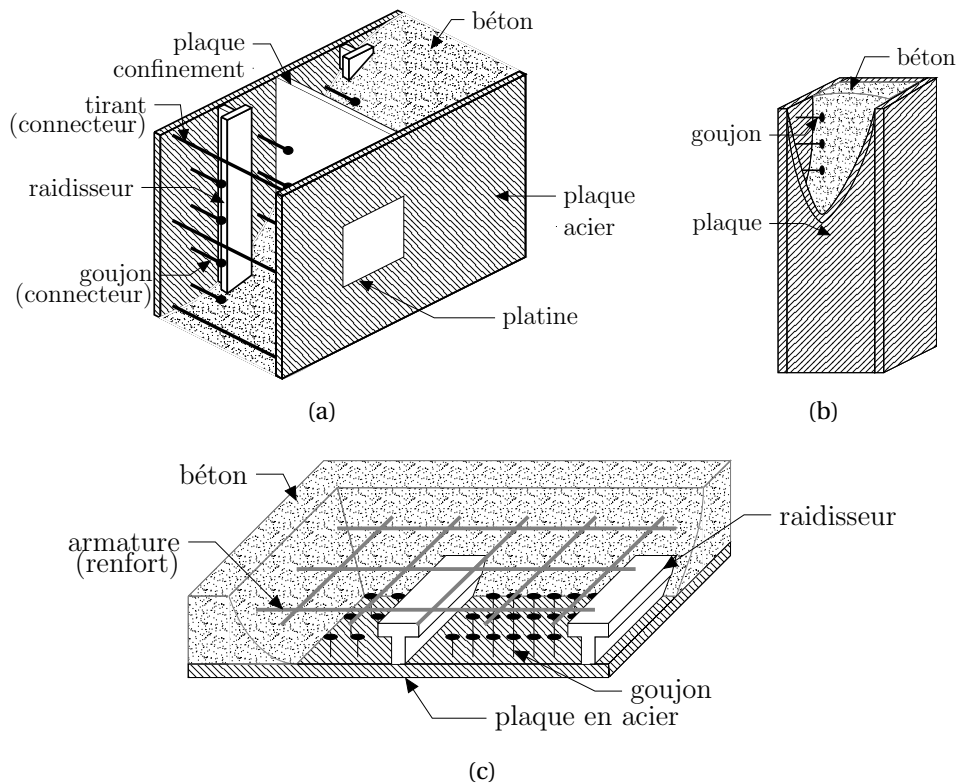


FIGURE 1.4: SC comme voile (a), poteau (b) et dalle (c), adapté de [Takeuchi *et al.*, 1998]

Pour finir, poteaux et poutres en SC doivent assurer une certaine rigidité puisqu'ils seront le support, entre autres des équipements et devront résister aux phénomènes vibratoires. Ils se présentent classiquement sous forme de poteaux hybrides [Shanmugam et Lakshmi, 2001], en acier avec un remplissage de béton. A l'image des voiles, les poteaux sont munis de goujons (figure 1.4b).

La mise en place des éléments SC se fait ensuite dans l'ordre suivant : poteaux et poutres sont positionnés (i) suivis des voiles (ii) puis des dalles (iii). Après positionnement des armatures pour les systèmes d'ancrage (iv), le béton est mis en œuvre (v). Enfin, les joints entre les panneaux sont soudés ou scellés (vi).

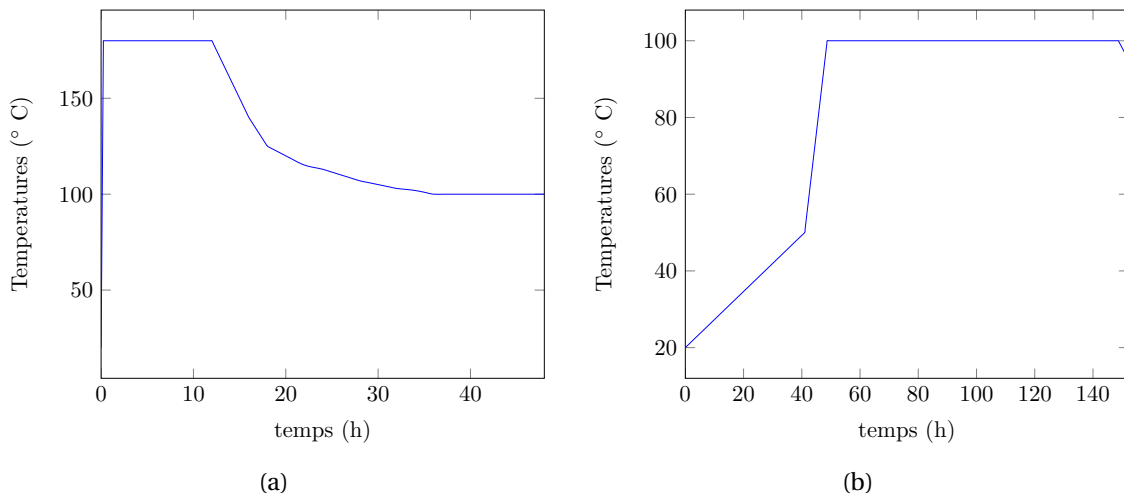
### 1.3.2 Chargements accidentels nucléaires

Les rapports techniques [Conti *et al.*, 2013, Schlaseman et Jeffery, 2004] et les guides de conceptions JEAC-4618 et KEPIC-SNG proposent un champ d'application des SC aux structures conventionnelles de l'îlot nucléaire. Ces différents ouvrages excluent l'utilisation des éléments modulaires pour tout élément de construction important pour la protection (EIP), et en particulier pour l'enceinte de confinement. Toutefois, les projets de SMR et de réacteurs neutrons rapides en développement remettent ces exclusions en cause. Les acteurs américains et japonais du Nucléaire civil s'interrogent sur une telle application des éléments

composites acier-béton [Varma *et al.*, 2009, Katoh *et al.*, 2011].

L'adoption de la technologie SC dans l'enceinte de confinement ou pour le stockage combustible nécessite de résoudre deux difficultés. Premièrement les structures doivent répondre aux exigences mécaniques propres au nucléaire. Notamment en scénario accidentel, la structure doit pouvoir tenir au séisme tout en supportant une température et une pression élevées suite à la rupture, par exemple d'une tuyauterie du circuit de refroidissement. Deuxièmement, l'étanchéité des éléments EIP doit être assurée afin d'éviter la dissémination des radio-éléments.

EDF, dans le cadre de ce travail de thèse, s'intéresse tout particulièrement à deux utilisations potentielles : pour les casemates, abritant les générateurs vapeur et situées dans l'enceinte de confinement, et pour les piscines de refroidissement combustible. En cas d'accident grave dans les casemates, la température augmente, quant à elle, en 900s jusqu'au seuil de 180°C où elle se maintient avant de diminuer (figure 1.5a). Les piscines peuvent s'ébouillanter, la température atteignant 100°C en quelques dizaines d'heures (figure 1.5b).



**FIGURE 1.5:** Chargements thermiques : accident grave (a) et ébullition de l'eau (b)

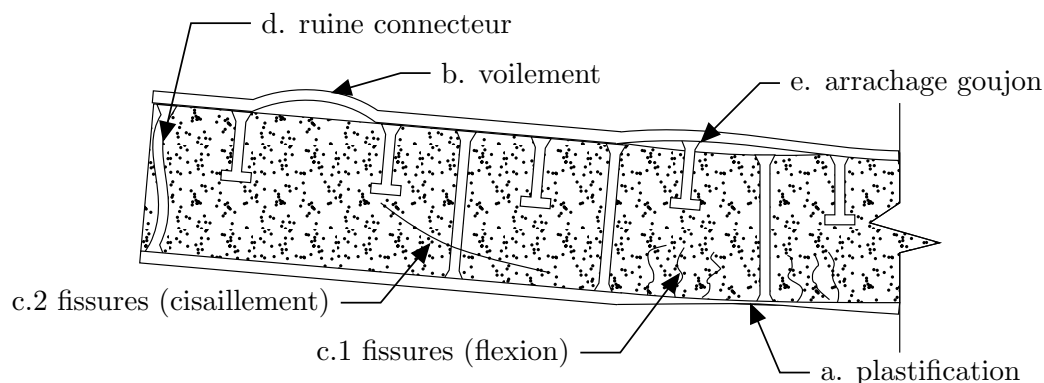
La suite de notre étude considérera ces scénarios comme référence [EDF, 2006] et s'axera tout particulièrement sur les réponses des SC à 200°C.

Dans la section suivante, nous étudierons les connaissances actuelles sur les réponses de la technologie SC sous chargements mécaniques aux températures ambiante et élevée. Nous confronterons les résultats expérimentaux de la littérature aux recommandations des guides de conception et aux modèles analytiques développés. Nous positionnerons ainsi nos recherches par rapport aux manques identifiés dans l'analyse bibliographique.

## 2 Comportement mécanique à température ambiante

Depuis 1995, la communauté scientifique s'intéresse au comportement des structures composites à température ambiante. De nombreuses études ont été menées, tant sur l'utilisation des SCs comme éléments structuraux (voiles [Ozaki *et al.*, 1995, Takeuchi *et al.*, 1998], poutres [Roberts *et al.*, 1996]) qu'au niveau des connecteurs [Roberts et Dogan, 1998, Xie *et al.*, 2004] .

Du point de vue structurel, les éléments SCs présentent à température ambiante un comportement assez proche des structures RC traditionnelles. Cependant les plaques en acier extérieures fournissent une ductilité et un bras de levier (à sections de voile identiques) plus importants que des armatures passives. Il en résulte des propriétés de résistance mécanique intéressantes notamment vis à vis du séisme [Akita *et al.*, 2001, Niousha *et al.*, 2007]. Cependant l'externalisation des renforts passifs introduit également des modes de ruines propres aux éléments SCs (figure 1.6). La philosophie des guides de conception (JEAC-4618, KEPIC-SNG) consiste à prévenir chacun de ces modes de rupture. Dans la suite, nous confronterons ces recommandations aux résultats expérimentaux disponibles dans la littérature. [Oduyemi et Wright, 1989], lors des essais de Cardiff, ont mis en évidence les cinq modes de ruines prépondérants présentés par la figure 1.6 :



**FIGURE 1.6:** Modes de ruine caractéristiques d'un SCs, adapté de [Burgan, 1997]

La plaque tendue est sujette à la plastification de l'acier (**a**). La plaque comprimée peut présenter deux modes de ruines. Si la plaque est épaisse ou que les connecteurs sont rapprochés un écrasement peut se produire conduisant à la plastification de la plaque. Sinon, en cas de plaque mince, le risque principal consiste en son voilement (**b**). La résistance de la plaque comprimée au voilement est fonction du moment d'inertie et des imperfections géométriques initiales de la plaque. Le béton quand à lui présente une bonne résistance à la compression et une faible résistance à la traction. trois modes de ruines sont envisagés :

- la ruine en compression à cause de l'écrasement du béton
- l'ouverture de fissures en flexion (**c.1**).

- la ruine en cisaillement, caractérisée par le glissement de deux blocs l'un par rapport à l'autre au voisinage d'une fissure (**c.2**).

Les connecteurs tirants vont principalement reprendre le cisaillement. Ils doivent résister au glissement entre les plaques d'acier et le béton de remplissage. Lorsque la valeur du cisaillement dépasse la résistance en cisaillement du béton, le connecteur va subir une traction et se comporter comme les tirants d'un treillis [Xie *et al.*, 2007]. La pratique montre que même lorsque le béton reste intact, le tirant reprend une importante proportion de cette traction. Par ailleurs la compressibilité du béton au voisinage de l'interface entre la plaque et le tirant peut générer de la flexion au niveau des connecteurs traversants (**d**). Trois modes de ruine des connecteurs ont été répertoriés [Xie *et al.*, 2004] :

- La rupture du connecteur à travers l'épaisseur complète de la plaque d'acier, mode de ruine observé pour des plaques fines telles que :  $t_p \leq 0.4 \cdot \varnothing_g$ .
- La rupture du connecteur au niveau du cordon de soudure, mode de ruine observé pour des plaque fines telles que :  $t_p \geq 0.4 \cdot \varnothing_g$ .
- La plastification ou la ruine des connecteurs qui peut, en outre, activer la ruine de la structure par voilement de la plaque d'acier comprimée.

Dans le cas de connecteur type goujon, l'arrachage (pull-out) qui peut s'accompagner de la rupture du goujon (**e**) ou de la ruine du béton par formation d'un cône est à éviter.

Chacun de ces modes de ruine peut entraîner la décohérence de l'interface plaque-béton. Les actions composites ne sont alors plus développées au travers de l'élément, ce qui peut aboutir à la ruine de ce dernier. Dans la suite, les résultats expérimentaux obtenus en sollicitant les SCs avec des chargements mécaniques usuels seront présentés et confrontés aux recommandations de dimensionnement des guides existants.

## 2.1 Réponse en flexion

Le comportement des éléments SC est très proche de celui des structures en béton armé sous condition de parfaite adhérence à l'interface plaque-béton. Cette hypothèse, pour être valide nécessite un nombre suffisant de connecteurs. Ainsi la résistance au cisaillement ne pilote plus le dimensionnement de la structure. Les différents guides de conception adoptent communément les hypothèses suivantes [Burgan et Eleftherios, 2014] :

- La section de béton fissuré ne participe pas à la résistance à la traction.
- Les sections planes restent planes.
- Une approche par bloc de contraintes équivalentes est généralement adoptée bien que les hypothèses sur la distribution des contraintes et des efforts à travers la section puissent différer.

### 2.1.1 Données expérimentales

De nombreux essais en flexion 3 points [Xie et Chapman, 2006, Varma *et al.*, 2011c] ou 4 points [Oduyemi et Wright, 1989, Roberts *et al.*, 1996] ont été réalisés. L'objectif initial consis-

tait à caractériser la résistance au cisaillement hors-plan et la reprise des efforts par les connecteurs. Cependant les essais réalisés ont également pu fournir des indications sur le comportement en flexion des éléments composites. Pour la plupart des spécimens testés en flexion lors de ces essais, la ruine de l'élément s'est produite de façon anticipée due au cisaillement hors-plan. Une exception est à noter lors d'une campagne expérimentale menée par [Hong *et al.*, 2010] pour laquelle la ruine par flexion s'est produite à deux reprises. Cependant les spécimens concernés étaient également renforcés par des raidisseurs dont les contributions à la résistance mécanique sont négligées par les guides JEAC-4618 et KEAC-SNG. Seuls les travaux effectués par [Roberts *et al.*, 1996], [Oduyemi et Wright, 1989] et [Xie et Chapman, 2006] disposent de données suffisamment détaillées pour établir des comparaisons avec les prescriptions des guides de dimensionnement existants. Ces résultats sont synthétisés dans le tableau 1.3 pour les éléments de poutre ayant présenté un mode de ruine de flexion. Où  $P_{\text{exp}}$  est la charge à rupture ;  $l_x$  la longueur totale de la poutre,  $t_{p-}$  et  $t_{p+}$  les

**TABLE 1.3:** Charges à rupture en flexion rencontrées dans la littérature

Etude	Nom	Connecteur	$l_x$ (mm)	$t_{p+}$ (mm)	$t_{p-}$ (mm)	$n_g$	$P_{\text{exp}}$ (kN)	Ruine
Oduyemi (1989)	B1	Goujon	1500	3.00	2.00	12	51	TPY/CC
	B4	Goujon	1500	4.00	6.00	22	124	TPY/CC
	D2	Goujon	1500	3.00	3.00	12	38	TPS
	D3	Goujon	1500	3.00	3.00	12	17.5	TPS
	F2	Goujon	1500	3.00	3.00	18	67	TPY/CC
Roberts (1996)	B1	Goujon	1700	8.04	8.04	48	630	TPY
	B2	Goujon	1700	8.10	4.03	48	700	TPS
	B3	Goujon	1700	8.07	4.05	36	315	TPS
	B4	Goujon	1700	8.05	8.00	4	725	TPY
	B5	Goujon	1700	8.10	4.05	4	465	TPS
	B6	Goujon	1700	8.10	4.00	4	510	TPS
	B9	Goujon	3200	8.04	8.05	4	295	TPS/TPY
	B10	Goujon	3200	8.05	3.97	4	170	TPS/TPY
	B11	Goujon	3200	7.98	3.99	4	115	TPS
Xie (2006)	BS1	Tirant	1400	6.23	6.23	14	1096	TPY
	BS2	Tirant	1400	7.91	7.91	14	1738	TPY
	BS4	Tirant	1400	6.13	11.95	14	553	TPY
	BS10	Tirant	2600	6.10	11.95	14	245	TPY
	BS13	Tirant	1800	10.31	10.21	18	1201	TPY

TPY : plastification plaque tendue, CC : écrasement du béton

TPS : glissement plaque tendue

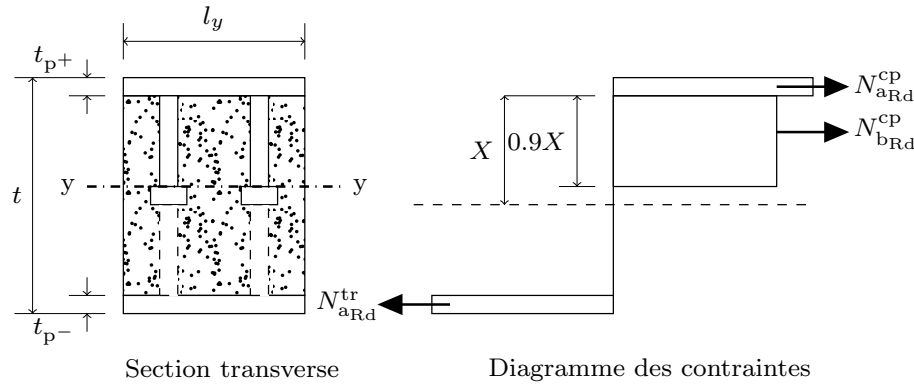
épaisseurs des tôles d'acier inférieure et supérieure et  $n_g$  le nombre de connecteurs traversants.

### 2.1.2 Guides de conception

A partir des observations expérimentales synthétisées dans la table 1.3, il apparaît que le mode de ruine prépondérant en flexion est la plastification de la plaque tendue. La plupart des guides de conception (JEAC-4618, KEPIC-SNG, AISC) adoptent ce mode de ruine comme critère de dimensionnement.

Dans la suite, les méthodes permettant d'aboutir à l'expression du moment résistant seront succinctement présentées pour chaque document.

**SCI-P131 :** La formule proposée par ce premier document est basée sur deux hypothèses. Un bloc rectangulaire de contrainte équivalente pour le béton de dimension  $0.9X$  est considéré dans ce guide, où  $X$  est la position de l'axe neutre par rapport à l'interface plaque/béton. Les efforts dans la plaque dépendent des paramètres matériaux et de la capacité des connecteurs à transférer tout ou partie des efforts au béton.



**FIGURE 1.7:** Diagrammes des contraintes équivalentes (SCI-P131)

Soit  $Q_{gRd}$  la résistance au cisaillement des goujons utilisés et  $n_g \geq \frac{N_{aRd}^{tr}}{Q_{gRd}}$  le nombre de connecteurs. A l'état de limite ultime, les efforts résistants tiennent compte de la nature de la liaison acier-béton (adhérence parfaite ou connexion partielle). Leurs expressions sont données par 1.2c.

$$N_{aRd}^{tr} = \frac{A_a^{tr} \sigma_y^{tr}}{\gamma_p} \quad (1.2a)$$

$$N_{aRd}^{cp} = \begin{cases} \frac{A_a^{cp} \sigma_y^{cp}}{\gamma_p} & \text{si } n_g \geq \frac{N_{aRd}^{tr}}{Q_{gRd}} \text{ (adhérence parfaite)} \\ n_g Q_{gRd} & \text{sinon (connexion partielle)} \end{cases} \quad (1.2b)$$

$$N_{bRd}^{cp} = 0.45 \sigma_{bk}^{cp} l_y (0.9X) \quad (1.2c)$$

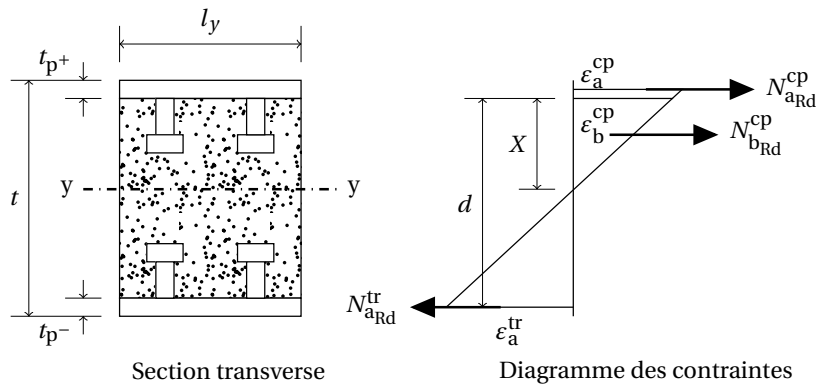
Où  $A_a^{tr}$  est la section d'acier tendue (respectivement comprimée pour  $A_a^{cp}$ ),  $\sigma_y^{tr}$  la limite d'élasticité en zone tendue (respectivement comprimée pour  $\sigma_y^{cp}$ ),  $\gamma_p$  le coefficient partiel de sécurité pour les plaques et  $\sigma_{bk}^{cp}$  la résistance à la compression (cubique) du béton.

La position ( $X$ ) de l'axe neutre est déterminée à partir de l'équilibre des efforts :  $N_{aRd}^{tr} = N_{aRd}^{cp} + N_{bRd}^{cp}$  qui mène à  $X = \frac{2.47}{\sigma_{bk}^{cp} l_y} \left[ \frac{A_a^{tr} \sigma_y^{tr}}{\gamma_p} - N_{aRd}^{cp} \right]$ .

L'expression du moment résistant s'en déduit à travers l'équilibre à l'axe neutre :

$$M_{Rd} = N_{aRd}^{cp} \left( X + \frac{t_{p^+}}{2} \right) + N_{bRd}^{cp} (0.55X) + N_{aRd}^{tr} \left( t - X - t_{p^+} - \frac{t_{p^-}}{2} \right) \quad (1.3)$$

**JEAC-4618 :** L'approche du JEAC-4618 fait intervenir un diagramme des contraintes dont les blocs ne sont plus rectangulaires mais suivent une répartition linéaire à travers la section. Les matériaux béton et acier sont supposés linéaires élastiques et l'adhérence entre plaque et béton est considérée parfaite ( $\varepsilon_b = \varepsilon_a$ ).



**FIGURE 1.8:** Diagrammes des contraintes équivalentes (JEAC-4618)

L'équilibre des efforts :  $N_{aRd}^{tr} = N_{aRd}^{cp} + N_{bRd}^{cp}$  peut s'écrire :  $A_a^{cp} \sigma_a^{cp} + \int_0^X \sigma_b A_a^{cp} \frac{y}{X} dy - A_a^{tr} \sigma_a^{tr} = 0$ .

Or en posant  $n_H = E_a/E_b$  et en constatant que  $\varepsilon_a^{cp} = \frac{X+t_{p^+}/2}{X} \varepsilon_b^{cp}$  et  $\varepsilon_a^{tr} = \frac{d-X}{X} \varepsilon_b^{cp}$ , il vient :  $t_{p^+} l_y n_H \frac{X+t_{p^+}/2}{X} + \frac{X}{2} l_y - t_{p^-} l_y n_H \frac{d-X}{X} = 0$ , où  $d = t - \frac{t_{p^+}+t_{p^-}}{2}$ . On pose  $d_p = \frac{t_{p^+}}{2}$  et l'équation d'équilibre devient :

$$\frac{1}{2} l_y X^2 + n_H A_a^{cp} (X + d_p) - n_H A_a^{tr} (d - X) = 0 \quad (1.4)$$

Cette dernière équation permet de déterminer  $X$  :

$$X = \frac{-n_H (A_a^{cp} + A_a^{tr}) + \sqrt{n_H^2 (A_a^{cp} + A_a^{tr})^2 + 2 l_y n_H (d A_a^{tr} - d_p A_a^{cp})}}{l_y} \quad (1.5)$$

La seconde équation d'équilibre se détermine en écrivant la somme des moments des contraintes agissantes dans la section :



$$M = \int_0^X (\sigma_b^{\text{cp}} A_a^{\text{cp}} \frac{y}{X}) y l_y dy + A_a^{\text{cp}} \sigma_a^{\text{cp}} A_a^{\text{cp}} (X + d_p) + A_a^{\text{tr}} \sigma_a^{\text{tr}} (d - X)$$

Le JEAC-4618 introduit la courbure  $\kappa$  telle que  $\varepsilon_b^{\text{cp}} = \kappa X$ . Il vient enfin :

$$M = E_b \kappa \left[ \frac{X^3}{3} l_y + n_H A_a^{\text{cp}} (X + d_p)^2 + n_H A_a^{\text{tr}} (d - X)^2 \right] \quad (1.6)$$

**Autres codes :** Le tableau 1.4 résume formules et hypothèses sans présenter le détail des développements.

**TABLE 1.4:** Moment résistant (AISC et KEPIC-SNG)

Code	Adhérence	Expression du moment résistant.
AISC	Parfaite	$M_{\text{Rd}} = \sigma_y \left( \frac{A_a^{\text{cp}} + A_a^{\text{tr}}}{2} \right) 0.9 t$
KEPIC	Parfaite	$M_{\text{Rd}} = f_{\text{crit}} A_a^{\text{cp}} (t - t_{\text{p}^+}) + (\sigma_y - f_{\text{crit}}) A_a^{\text{cp}} \left( t - 1.5 t_{\text{p}^+} - 0.5 t_{\text{p}^+} \frac{(\sigma_y - \sigma_{\text{crit}})}{0.85 \sigma_{\text{bk}}} \right)$ Avec $t_{\text{p}^+} = t_{\text{p}^-}$ , $f_{\text{crit}}$ et $\sigma_{\text{crit}}$ effort et contrainte critiques de voilement.  Si les connecteurs sont dimensionnés tels que le voilement local ne se produit pas : $\sigma_{\text{crit}} = \sigma_y$ et $M_{\text{Rd}} = \sigma_y A_a^{\text{tr}} (t - t_{\text{p}^+})$  Présence de raidisseur : ajouter le terme $\sigma_{\text{yT}} A_{\text{r}} d_{\text{r}}$

[Burgan et Eleftherios, 2014] montrent que les expressions données par KEPIC-SNG et AISC sont plus conservatives que SCI-P131, en menant la comparaison avec les résultats expérimentaux présentés table 1.3. Ce constat est cependant valable uniquement pour certains spécimens, lorsque l'hypothèse d'adhérence parfaite plaque-béton est vérifiée. Par ailleurs, [Wright *et al.*, 1991] s'intéressent également à la flexion composée et proposent des courbes d'interaction effort-moment. Outre la ruine par plastification de la plaque tendue, il est important de prévenir la fissuration du béton et de déterminer la raideur de la structure en réponse à du cisaillement. En effet, les applications nucléaires prévues pour ces éléments structuraux nécessitent de tenir compte du risque sismique.

## 2.2 Résistance au cisaillement

Les éléments modulaires ont été tout particulièrement étudiés au Japon et en Corée au début des années 2000. Ces pays étant dotés d'une forte sismicité, un soin particulier a été attaché au traitement du comportement des SCs en présence de cisaillement. Deux cas de chargement seront distingués dans la suite : cisaillement hors-plan, repris essentiellement par les connecteurs et le béton (i) et cisaillement dans le plan (ii) pour lequel les plaques métalliques imposeront le dimensionnement.

### 2.2.1 Cisaillement hors-plan

Il s'agit d'un mode de ruine fragile qui doit être évité. Ce point est repris par la plupart des guides de dimensionnement (voir table 1.5) et présente d'importantes similarités avec les structures classiques en béton armé.

**TABLE 1.5:** Critères de résistance au cisaillement hors-plan issus de la littérature

Code	Situation	Critère
AISC	Absence tirants	$Q_{Rd} = Q_c + Q_s$ $Q_s = 0$ $Q_c = 0.002 \sqrt{\sigma_{bk}} t_b (12)$
	Renforts transverses - connecteurs tirants - ou goujons se recouvrant	$Q_{Rd} = Q_c + Q_s$ $Q_s = \sigma_y A_g \left( \frac{t_b}{s_x} \right) \left( \frac{12}{s_y} \right)$ $Q_c = 0.002 \sqrt{\sigma_{bk}} t_b (12)$
JEAC-4618	Absence tirants	$Q_{Rd} = 0.16 \sqrt{\sigma_{bk}} l_y t$
	Renforts transverses - connecteurs tirants - goujons se recouvrant	$Q_{Rd} = \max \left( 0.16 \sqrt{\sigma_{bk}} l_y t, \frac{1}{2} Q_{as} \right)$ $Q_{as} = \min (Q_w, 0.8 [Q_{arch} + Q_{bond}])$ $Q_{arch} = \frac{1}{9 \varrho_{sh}} \nu_2 \sigma_{bk} l_y t$ $Q_{bond} = 0.45 \frac{Q_{gu}}{s_x s_y} l_y t$ $\nu_2 = 0.8 + 0.05 \varrho_{sh}$ $Q_w = \max \left( 0.31 \sqrt{\sigma_{bk}} l_y t, 2.8 (\varrho_g \sigma_y)^{3/2} \frac{l_y t}{\varrho_\sigma} \right)$
KEPIC-SNG	Absence tirants	$Q_{Rd} = Q_{cr} + Q_{ar}$ $Q_{cr} = 0.16 \sqrt{\sigma_{bk}} l_y t$ $Q_{ar} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{4 \varrho_\sigma (1 - \varrho_\sigma) + \varrho_{sh}^2} - \varrho_{sh} \right] \nu_2 \sigma_{bk} l_y t$ $\nu_2 = 0.8 + 0.05 \varrho_{sh}$
	Renforts transverses - connecteurs tirants	$Q_{Rd} = Q_{cr} + Q_{ar} + Q_s$ $Q_s = \varrho_g \sigma_y l_y t$

Où  $\sigma_{bk}$  est la résistance du béton en compression,  $t_b$  la hauteur du bloc béton,  $\sigma_y$  la limite d'élasticité des connecteurs,  $A_g$  la section des connecteurs participant à la reprise du cisaillement (tirants ou goujons qui se recouvrent),  $s_x$  l'espacement des connecteurs dans le sens longitudinal au cisaillement,  $s_y$  l'espacement des connecteurs dans le sens transversal,

$l_y$  la largeur de la section et  $t$  son épaisseur,  $Q_{gu}$  la résistance au cisaillement du connecteur,  $\rho_{sh}$  le rapport de portée en cisaillement,  $\rho_g$  la quantité de renforts transverses et enfin  $\rho_\sigma$  est le rapport de la résistance à l'arrachement des connecteurs sur la résistance à la compression du béton (figure 1.4).

De nombreux chercheurs [Roberts *et al.*, 1996, Xie et Chapman, 2006, Hong *et al.*, 2010] ont réalisé des essais en vue de caractériser le comportement des éléments modulaires soumis à du cisaillement hors-plan. Pour la plupart ces expérimentations ont été menées en flexion 3 ou 4 points.

Dans leur campagne expérimentale, [Hong *et al.*, 2010] s'intéressent tout particulièrement à la notion d'actions composites et en particulier à l'influence des connecteurs sur la réponse structurelle. Ils observent notamment que la raideur apparente de la structure n'est pas directement dépendante de la quantité de connecteurs présents. L'influence de ces derniers se traduit par une ductilité accrue de l'élément composite SC. Cependant, il apparaît que l'absence de connecteurs précipite la ruine systématique par cisaillement. En effet, les connecteurs<sup>3</sup> restreignent l'ouverture des fissures du béton, en particulier aux points de chargement. [Xie et Chapman, 2006] se sont particulièrement intéressés à la tenue des connecteurs (tirants) pour de tels chargements et ont proposé un modèle analytique en treillis pour le modéliser.

A partir de leurs données expérimentales, les coréens [Hong *et al.*, 2010] ont proposé un modèle analytique basé sur un découplage de la réponse en deux mécanismes : treillis (i) et arc (ii) et la prévention de trois modes de ruines : rupture de l'interface (a), par traction diagonale (b) ou par écrasement diagonal (c). La prédominance d'un mécanisme sur l'autre dépendant du rapport de portée en cisaillement donnée par  $\rho_{sh} = t / l_x$ . Plus  $\rho_{sh}$  augmente, plus le mécanisme en treillis participe à la réponse globale pouvant aller jusqu'à conduire à une ruine en flexion plutôt qu'en cisaillement. Une approche similaire a été également proposée par les japonais [Suzuki *et al.*, 1995]. Il est donc naturel de retrouver ces approches dans les guides du KEPIC-SNG et du JEAC-4618.

Dans leur rapport [Burgan et Eleftherios, 2014]

comparent les résultats expérimentaux aux solutions analytiques et démontrent le conservatisme des trois approches tout en appuyant les conclusions de [Varma *et al.*, 2011c] qui s'étaient focalisés sur les AISC-N690.

### 2.2.2 Cisaillement dans le plan

La réponse des SCs à des sollicitations conduisant à du cisaillement dans le plan diffère de celle du béton armé. En effet les plaques d'acier ne contribuent pas seulement à procurer une raideur longitudinale et transverse. Elles fournissent également une raideur dans leur propre plan. Bien qu'il soit très délicat de réaliser des essais de cisaillement pur, plusieurs auteurs [Sasaki *et al.*, 1995, Ozaki *et al.*, 2004] ont abordé la question afin d'étudier la réponse des SCs à des sollicitations cycliques de type sismique. En particulier dans l'étude de [Sasaki *et al.*, 1995], le spécimen conçu était un voile en H dont les ailes, fortement renforcées, avaient pour charge de reprendre les efforts de flexion et de plastifier tandis que l'âme

3. Tirants ou goujons à condition que ces derniers se recouvrent.

devait être sollicitée en cisaillement pur.

Des courbes effort-déplacement obtenues suite à leur campagne expérimentale, [Sasaki *et al.*, 1995] conclurent que les éléments de constructions modulaires SCs présentaient une ductilité plus importante qu'une structure conventionnelle béton armé (figure 1.9). Ils établirent une corrélation entre la raideur structurelle  $K$  qui augmentait et  $t_p$  qui augmentait ou  $\rho_{sh}$  qui diminuait.

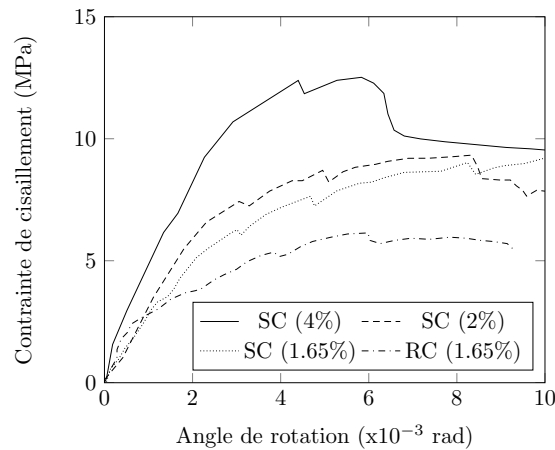


FIGURE 1.9: Réponse au cisaillement plan selon le ratio d'acier  $\rho_g$  [Sasaki *et al.*, 1995]

[Ozaki *et al.*, 2004] ont procédé à des essais cycliques qui ont montré que plus la plaque était fine, plus le module de cisaillement  $G_{sh}$  augmentait, tandis que  $\varepsilon_{sh}$  diminuait. Ce constat restait valable que la structure soit sollicitée dans son domaine élastique ou qu'elle soit fissurée. Les essais avaient été réalisés de telle sorte que l'épaisseur  $t$  de l'élément soit constante. C'est donc l'épaisseur du remplissage béton qui avait été réduite amenant ce dernier à reprendre un effort plus important, se traduisant par un endommagement accentué.

La littérature propose des stratégies différentes pour estimer la résistance au cisaillement dans le plan des éléments SCs. Généralement, les critères de dimensionnement portent sur l'espacement entre connecteurs  $s$  et l'épaisseur de la plaque  $t_p$ . La formulation des critères se focalise sur l'expression d'une contrainte ultime de cisaillement calculée en tenant compte d'une contribution de l'acier et du béton.

Les recherches de [Varma *et al.*, 2011b] ont amené leurs auteurs à développer un modèle analytique du comportement mécanique des éléments modulaires au cisaillement pur. Pour atteindre cet objectif, [Varma *et al.*, 2011b] supposent que le comportement au cisaillement dans le plan des SCs peut être prédit en se basant sur la théorie des plaques composites, en faisant les hypothèses d'un comportement élastique isotrope de l'acier (i), d'un comportement élastique isotrope du béton avant fissuration (ii), d'un comportement élastique orthotrope du béton après fissuration telle que la raideur soit nulle dans la direction principale de traction et limitée à 70% de la raideur élastique dans la direction principale de compression (iii) et d'un critère de plastification de von Mises pour les aciers (iv). Connaissant les efforts membranaires  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$ , l'expression des efforts principaux est donnée

par :

$$\begin{aligned} N_I &= \frac{1+\cos(2\theta)}{2} N_x + \frac{1-\cos(2\theta)}{2} N_y + \sin(2\theta) N_{xy} \\ N_{II} &= \frac{1-\cos(2\theta)}{2} N_x + \frac{1+\cos(2\theta)}{2} N_y - \sin(2\theta) N_{xy} \\ \tan(2\theta) &= \frac{2N_{xy}}{N_x - N_y}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Pour le béton, il vient dans le repère des contraintes principales  $\underline{\sigma} = \underline{E}_b^{\text{fiss}} \cdot \underline{\varepsilon}_p$ , après fissuration :

$$\underline{E}_b = 0.7 E_b \begin{bmatrix} 1 \text{ ou } 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \text{ ou } 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \underline{E}_a = \frac{E_a}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Puis en définissant  $\underline{T}_{\underline{\sigma}}$  (resp  $\underline{T}_{\underline{\varepsilon}}$ ) la matrice de passage de la base des contraintes (resp. déformations) principales à la base globale, le module du béton est définie par  $\underline{E}_b^{\text{fiss}} = \underline{T}_{\underline{\sigma}} \cdot \underline{E}_b \cdot \underline{T}_{\underline{\varepsilon}}$ . Enfin, la loi globale de l'élément SC est obtenue par [Varma *et al.*, 2011b] en sommant les contributions des plaques en acier et du béton.

$$\underline{N} = \left[ 2 t_p \underline{E}_a + t_b \underline{E}_b^{\text{fiss}} \right] \cdot \underline{\varepsilon} \quad (1.9)$$

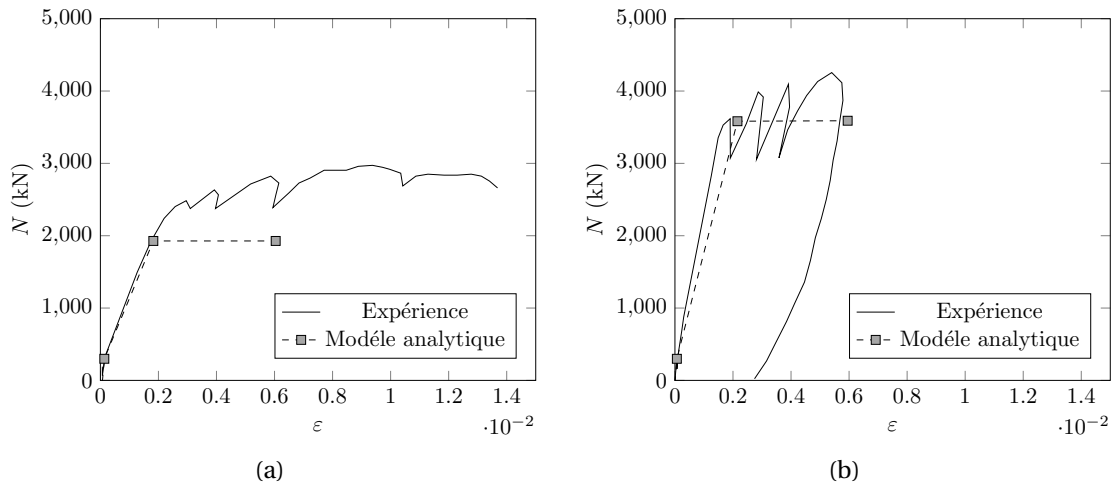
Cette dernière équation (1.9) associée aux seuils de rupture du béton en traction (i) et de plastification des aciers (ii) a permis aux chercheurs de développer une loi de comportement effort-déplacement tri-linéaire.

La première section correspond à la structure intègre, la seconde à la reprise des efforts par les plaques après ruine du béton, et enfin à un plateau après plastification. [Varma *et al.*, 2011d] ont ensuite comparé les résultats analytiques aux données fournies par [Ozaki *et al.*, 2004]. Le modèle et la réponse expérimentale présentent pour chaque spécimen une correspondance intéressante dans les deux sections linéaires. Pour la troisième section, en tenant compte d'une plasticité parfaite, le modèle est conservatif, comme illustré par la figure 1.10.

Les études précédemment citées illustrent le comportement intéressant des éléments SCs et leur bonne ductilité en présence de chargement sismique. Cependant, par leur conception, les plaques d'acier sont vulnérables au voilement qui en fait un mode de ruine spécifique et une faiblesse en comparaison de structures RC classiques. Ce mode de ruine a ainsi fait l'objet d'une attention toute particulière dans la littérature, du point de vue de la mécanique.

### 2.3 Voilement local de la plaque d'acier comprimée

De nombreux auteurs [Takeuchi *et al.*, 1998, Zhang *et al.*, 2014] ont remarqué que l'utilisation d'un nombre suffisant de connecteurs permettait de prévenir le voilement local des éléments de construction modulaire. Suite à ces observations, les recommandations existantes proposent d'assurer des espacements minimaux pour garantir le bon dimensionnement de la structure vis-à-vis de cette problématique.



**FIGURE 1.10:** Réponse au cisaillement dans le plan, comparaisons analytiques/expérimentales, spécimens (a) et (b) [Varma *et al.*, 2011d]

### 2.3.1 Études expérimentales

Selon les chercheurs [Oduyemi et Wright, 1989, Usami *et al.*, 1995, Roberts *et al.*, 1996] les paramètres gouvernant la réponse en voilement de la plaque comprimée mécaniquement sont :  $s$  l'espacement entre connecteurs,  $t_p$  l'épaisseur de la plaque d'acier et  $\sigma_y$  la limite d'élasticité du matériau constitutif de l'élément. Ces résultats sont synthétisés dans le tableau 1.6.

**TABLE 1.6:** Charges critiques rencontrées dans la littérature

Etude	Nom	$t_p$ (mm)	$s$ (mm)	$s/t_p$	$\sigma_y$ (MPa)	$P_{exp}$ (kN)	Ruine
Oduyemi (1989)	A1	2.00	100	50	242	57.5	BU
	A2	2.00	100	50	242	72	BU/TPY/CC
	C1	2.00	200	100	242	68	BU/TPY/CC
	C2	2.00	400	200	242	66.5	BU/TPY/CPY/CC
	F4	2.00	100	50	242	107	BU/CC
Usami (1995)	NS20	3.24	64.8	20	242	5730	BU
	NS30	3.24	97.2	30	242	5470	BU
	NS40	3.24	129.6	40	242	5000	BU
	NS50	3.24	162	50	242	5050	BU

BU : voilement local, CPY : plastification plaque comprimée,

TPY : plastification plaque tendue, CC : écrasement du béton

Lors de sa campagne expérimentale, [Oduyemi et Wright, 1989] observa la ruine par

voilement local de la plaque comprimée pour cinq spécimens sollicités en flexion 4 points. Aucun renfort passif n'étant présent dans les poutres testées, seule la contribution des connecteurs (goujons d'ancrage) fut étudiée. Cependant aucune précision n'est donnée quant à la chronologie des modes de ruines identifiées lors des essais, le voilement s'accompagnant généralement de la plastification de la plaque et de l'écrasement du béton.

Les travaux [Usami *et al.*, 1995] présentent des essais réalisés à l'échelle 1/5 d'éléments SC sollicités en compression. Les élancements ( $\varphi = s / t_{p+}$ ) ont été choisis de telle sorte que des voilements plastique et élastique aient pu être observés. Le voilement plastique s'est produit pour des élancements faibles ( $\varphi = 20$ ), des élancements plus importants conduisant à un voilement élastique ( $\varphi \in [30 - 40]$ ). L'effort critique a été déterminé lors des essais à l'aide de jauges de déformation fixées à l'extrados et à l'intrados des plaques en acier. Les résultats d'essais ont montré que les réponses des jauges ont évolué de façon similaire avant flambement puis ont dévié. En effet, lors du flambement, l'extrados évolue vers un état tendu tandis que l'intrados reste comprimé. La contrainte critique a ensuite été calculée de la façon suivante : la plaque d'acier est divisée en bandes transversales telles que l'évolution de la déformation soit linéaire dans chaque tranche (i). La contrainte est ensuite déterminée à partir de la loi de comportement de l'acier, à partir de la déformation (ii). Enfin, une contrainte moyenne est obtenue à partir des contraintes de chaque bande. Le flambement se produit lorsque cette contrainte change d'orientation et correspond à une traction.

### 2.3.2 Études théoriques

A partir des expériences d'Usami, [Takeuchi *et al.*, 1998] remarquent une bonne correspondance entre les résultats expérimentaux et les prédictions par les courbes de flambement d'Euler sous condition qu'une bande de flambement se comporte comme un poteau encastré à sa base et rotulé en tête. L'expression de la contrainte critique s'écrit alors :

$$\sigma_{\text{crit}} = \begin{cases} \sigma_y & \text{si } \varphi \leq 35 \\ \frac{\pi^2 E_a}{12 \eta^2 \varphi^2} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.10)$$

Avec  $\eta = 0.7$

Les auteurs de [Zhang *et al.*, 2014] ont effectué la comparaison entre l'éq. (1.10) et les résultats expérimentaux, synthétisés dans le graphe 1.11.

Les guides de conception des éléments modulaires s'inspirent très largement de ces observations. Dans leurs travaux, [Roberts *et al.*, 1996] supposent que la plaque comprimée se comporte comme un poteau encastré aux deux extrémités et de longueur efficace de flambement  $s/2$ . À partir de 1.7 ils extraient la condition d'élancement que doivent respecter les éléments SCs :  $\varphi = \sqrt{\frac{\pi^2 E_a}{3 \sigma_{\text{crit}}}}$  que le guide SCI-P131 [Narayanan *et al.*, 1994] reprend et simplifie en  $\varphi \leq 40$  en prenant  $E_a = 200 \text{ GPa}$  et  $\sigma_{\text{crit}} = 275 \text{ MPa}$ .

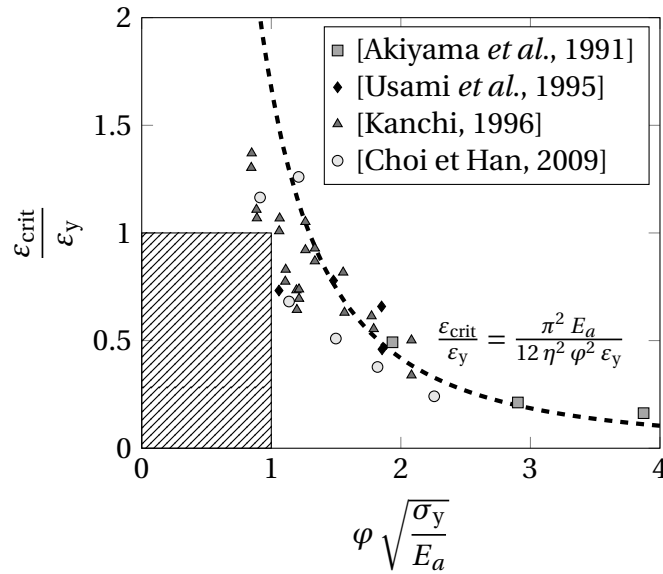


FIGURE 1.11: Contrainte critique de voilement : expériences vs théorie [Zhang *et al.*, 2014]

Le JEAC-4618 propose de remplir la double condition  $\varphi \leq 85$  et  $\varphi \leq 600/\sqrt{\sigma_y}$ , qui mène à  $\varphi \approx 36$  pour de l'acier S275. Le JEAC-4618 précise également que la longueur des connecteurs ( $l_g$ ), dont le rôle est d'empêcher le voilement local, doit être plus grande ou égale à huit fois le diamètre de la tige ( $\varnothing_g$ ). Ainsi, la résistance du connecteur est déterminée par sa capacité à reprendre la traction. En cas d'emploi de connecteurs plus courts, la rupture par cône du béton doit faire l'objet d'un traitement particulier.

Le KEPIC-SNG spécifie la condition  $\varphi = 1.3 \sqrt{\frac{E_a}{\sigma_y}}$  ( $= 36$  pour de l'acier S275) en supposant  $\eta = 0.7$ . Les recommandations concernant la longueur des connecteurs (JEAC-4618) sont reconduites par le présent guide coréen.

Enfin, le guide américain de l'AISC fait la distinction entre les connecteurs qui plastifient ou non. Pour chacune de ces deux catégories, trois conditions doivent être satisfaites : empêcher le voilement local (i). La plastification de la plaque doit se concentrer dans une bande de dimension  $L_y$  inférieure à 3 fois l'épaisseur de la plaque (ii). Le cisaillement à l'interface doit être plus important que le cisaillement hors-plan dans une zone de dimension  $L_{sh}$  correspondant à la distance entre moments maximal et nul (iii). Ces conditions sont synthétisées dans la table 1.7.

Les études portant sur le voilement se sont donc classiquement limitées à la compression simple, uniaxiale. Peu de développements supplémentaires sont apparus dans la littérature.

On notera toutefois l'étude de [Gallocher *et al.*, 2011] qui s'intéresse tout particulièrement aux effets de l'adhérence plaque-béton sur le voilement de la structure (donc non plus limité à la plaque). Dans cette étude, une formule analytique est proposée qui indique que le niveau d'actions composites dépend de la raideur à l'interface ( $K_{ipb}$ ) et de la section d'acier rapportée à celle de la structure ( $Q_a = 2 t_p / t$ ). [Gallocher *et al.*, 2011] ont étudié plusieurs cas de chargement : compression sur la plaque d'acier seule (i) ou sur le béton seul (ii). Ils ont défini le pourcentage d'actions composites développées comme le rapport des déforma-



tions de l'acier et du béton ( $\varepsilon_a$  et  $\varepsilon_b$ ). Une faible valeur indique le risque d'un glissement de la plaque par rapport au béton.

Enfin, [Liang *et al.*, 2004] se sont intéressés au panneau en état de compression biaxiale et soumis à du cisaillement. A partir d'études numériques et pour plusieurs conditions limites, ils ont établi des courbes interactions entre les coefficients critiques de flambement pour chaque direction de contraintes. Ainsi une estimation des contraintes critiques est possible pour des cas simples, rentrant dans le domaine de définition des abaques. Pour des éléments plus complexes, l'étude renvoie à l'usage de simulations numériques.

**TABLE 1.7:** Critères de voilement local issus de la littérature

Reference		Critère d'élancement	
SCI-P131		$\varphi \leq \sqrt{\frac{\pi^2 E_a}{3 \sigma_{crit}}}$	
JEAC-4618		$\begin{cases} \varphi \leq 85 \\ \varphi \leq 600 / \sqrt{\sigma_y} \end{cases}$	
		Pour les connecteurs : $l_g \geq \emptyset_g$	
KEPIC-SNG		$\varphi = 1.3 \sqrt{E_a / \sigma_y}$	
		Pour les connecteurs : $l_g \geq \emptyset_g$	
AISC-N690	Condition (i)	Condition (ii)	Condition (iii)
<i>connecteur élastique</i>	$\varphi \leq 1.0 \sqrt{E_a / \sigma_y}$	$s \leq 0.7 \sqrt{Q_c L_y / t_p \sigma_y}$	$s \leq 0.7 \sqrt{Q_{gu} L_{sh} / Q_{no}}$
<i>connecteur plastique</i>		$s \leq \sqrt{Q_c L_y / t_p \sigma_y}$	$s \leq \sqrt{Q_{gu} L_{sh} / Q_{no}}$

Avec  $Q_c$  le cisaillement repris par le connecteur,  $Q_{gu}$  la résistance du connecteur,

$Q_{no}$  l'effort nominal de cisaillement hors-plan

Le voilement local des plaques à température peut être prévenu par l'application des recommandations que nous venons de présenter. Cependant, il ne s'agit pas du seul mode de ruine induit par l'externalisation des plaques. Ces dernières n'étant pas protégées par un enrobage béton comme les armatures passives d'une structure RC, les voiles sont directement exposés aux agressions extérieures. Nous étudierons plus particulièrement le cas de la thermique en accord avec l'utilisation des SCs que l'on souhaite mettre en œuvre dans un réacteur nucléaire (1.3.2).

### 3 Comportement mécanique à température élevée

Le thème du comportement des SCs aux températures élevées a été peu abordé dans la littérature si on le compare au nombre d'études réalisées à température ambiante. Néanmoins, quelques travaux relatent le comportement des éléments modulaires à l'incendie [Yu *et al.*, 2006, Moon *et al.*, 2009] et l'effet de la température sur la raideur mécanique structurale [Varma *et al.*, 2009, Varma *et al.*, 2013b]. Le thème des hautes températures a été plus largement traité pour le cas spécifique des poteaux hybrides. La conception de ces derniers les rapprochant des éléments SCs, les conclusions des travaux portant sur ces poteaux constituent également une base de données exploitable [Han, 2001, Kodur, 2007].

#### 3.1 Comportement à l'incendie

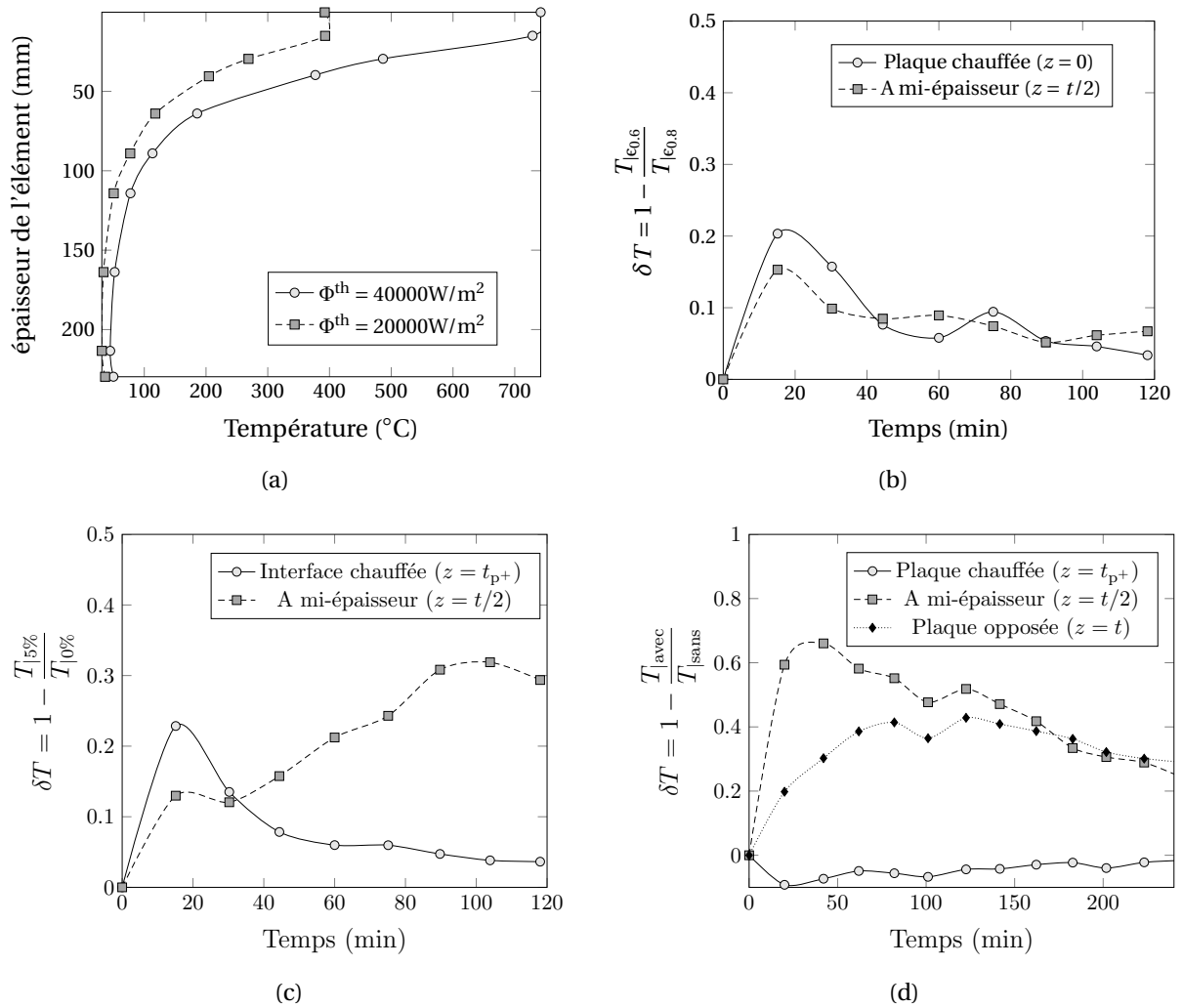
Les températures atteintes lors d'un scénario incendiaire sont plus élevées (1193°C selon la norme ISO-834) que les températures accidentelles dans une centrale nucléaire de production d'électricité (CNPE) (180°C). Les critères de résistance sont également différents. Dans le cas des chargements accidentels les critères de résistance mécanique et d'étanchéité devront être garantis. Les études réalisées dans la littérature que nous allons présenter traitent de structures conventionnelles pour lesquelles, en cas d'incendie, l'intégrité de la structure doit être préservée deux heures pour permettre l'intervention des secours. Les études réalisées fournissent des informations générales sur le comportement mécanique et sur la modélisation du problème thermique.

##### 3.1.1 Etude paramétrique de la modélisation thermique

Les auteurs de [Yu *et al.*, 2006] se sont intéressés à la modélisation numérique du comportement des éléments SCs au feu et particulièrement au phénomène thermique. Les influences du flux thermique imposé au modèle, de l'humidité du matériau béton, de l'émissivité du feu (nombre sans dimension caractéristique du rayonnement de la flamme) et de la présence des connecteurs sur le gradient de température ont été étudiées.

**Influence du flux thermique imposé :** Le chargement thermique est appliqué au modèle comme un flux thermique imposé représentatif de l'incendie. Lorsque la donnée du flux d'entrée augmente, la plaque exposée à l'incendie chauffe plus rapidement (figure 1.12a). Ainsi, après une heure d'incendie, la température de la plaque exposée atteint 900 °C tandis que la plaque opposée reste à des température inférieures à 40°C, même en présence de connecteurs traversants. Le remplissage béton, par ses propriétés d'isolant thermique, induit un gradient thermique important dans l'épaisseur de la structure. Ce point est vérifié expérimentalement par [Varma *et al.*, 2009].

**Influence de l'émissivité du feu :** [Yu *et al.*, 2006] n'ont pas observé de modifications conséquentes du champ de températures selon la valeur retenue pour l'émissivité de la flamme. Le paramètre ne leur paraît pas être significatif (figure 1.12b).



**FIGURE 1.12:** Gradient thermique en fonction du flux imposé (a), écart de températures entre feux d'émissivité 0.6 et 0.8 (b), écart de températures entre bétons hydratés à 0% et 5% (c) écarts de températures pour des modèles avec et sans connecteurs (d) [Yu *et al.*, 2006]

**Influence du degré d'hydratation du béton :** Le degré d'hydratation de béton affecte les propriétés thermiques du béton. [Yu *et al.*, 2006] ont observé une baisse de la température avec l'augmentation du degré d'hydratation dans leurs simulations numériques. Cette baisse de température est plus marquée pour des points de la structure éloignés de la source de chaleur que pour des points au voisinage de la flamme (figure 1.12c). En l'absence de précisions sur les équations du modèle, il convient d'être prudent vis à vis de ces conclusions qui vont à l'encontre des observations expérimentales [Khan, 2002], selon lesquelles la conductivité du béton augmente avec son degré d'hydratation.

**Influence des connecteurs :** Enfin, [Yu *et al.*, 2006] ont comparé les champs de températures pour des simulations tenant compte des connecteurs avec les résultats de simulations sans éléments transverses. Contrairement aux propos de [Cosgrove *et al.*, 2008] qui estiment que le comportement de la structure à l'incendie est déterminé seulement par le comportement des plaques ; [Yu *et al.*, 2006] révèlent que la modélisation des connecteurs ne doit pas être négligée. En effet, leur modélisation révèle des températures pouvant jusqu'à doubler localement dans l'épaisseur de la structure (figure 1.12d). Enfin, pour la plaque exposée, la température est légèrement plus faible lorsque le connecteur est modélisé qu'en son absence (erreur négative figure 1.12d). Cette observation est liée au chargement appliqué comme un flux thermique, la forte conductivité thermique du connecteur comparativement à celle du béton le transforme en puits thermique. **Dans nos études, nous déciderons de modéliser les connecteurs dans le système thermique.**

A partir de la connaissance du comportement thermique des SCs, un gradient de température dans la structure, représentatif du scénario accidentel, est calculable. Cette donnée d'entrée thermique permet ensuite d'étudier les propriétés de résistance mécanique des éléments SCs.

### 3.1.2 Influence de la température sur la résistance mécanique

La tenue mécanique des éléments SCs à l'incendie a été étudiée expérimentalement [Katoh *et al.*, 2011] et numériquement [Moon *et al.*, 2009] pour des voiles et des éléments de poutres. Les chercheurs [Han, 2001, Moon *et al.*, 2009] et [Kodur et Lie, 1997] ont respectivement considéré un feu ISO-834 avec des températures allant jusqu'à 1000°C en 120min. Ces températures peuvent être approchées par l'expression  $T = 20 + 750 [1 - \exp(-3.79553 \sqrt{t})] + 170.41 \sqrt{t}$ . Les auteurs de [Katoh *et al.*, 2011] ont préféré un accident type feu de sodium avec des températures plus basses : comprises entre 500°C et 700°C.

**Résistance à la compression :** Il s'agit du paramètre le plus étudié dans la littérature puisqu'il correspond à l'utilisation des éléments composites comme poteaux. Dans leurs études, [Han *et al.*, 2003] proposent une approche expérimentale visant à caractériser le comportement des poteaux hybrides acier-béton en cas d'incendie. Ils s'intéressent tout particulièrement à l'étude des paramètres suivants : l'influence de la section (carrée-**S** ou rectangulaire-**R**) et de la géométrie sur la réponse, l'influence de l'excentricité du chargement *e*, l'utilisation de couches protectrices contre le feu- **P**. Ainsi, onze spécimens ont été testés dont les caractéristiques sont exposées dans la table 1.8.

Parmi les spécimens testés, R-1, R-2, R-4, RP-1 et SP-3 ont rompu par compression. Les autres spécimens ont présenté un mode de ruine en flambement global. Les essais ont fait intervenir les paramètres suivants  $t_{pr}$ ,  $r_{exp}^{th}$ ,  $T_{exp}$  et  $N_{exp}$  qui représentent respectivement l'épaisseur de la couche de protection au feu, la durée de la résistance au feu, la température limite de fonctionnement et l'effort normal de compression appliqué. Le béton utilisé avait pour résistance caractéristique à la compression  $\sigma_{bk}^{cp} = 49$  MPa pour tous les spécimens hors SP-\*. Pour ces derniers (SP-\*) un béton moins résistant était utilisé ( $\sigma_{bk}^{cp} = 18.7$  MPa ).

**TABLE 1.8:** Résistances au feu de poteaux hybrides [Han *et al.*, 2003]

Nom	$t_b \times l_y \times t_p$ (mm)	$t_{pr}$ (mm)	$\sigma_y$ (MPa)	$E_a$ (GPa)	$e$	$r_{exp}^{th}$ (min)	$T_{exp}$ (°C)	$N_{exp}$ (kN)
R-1	$300 \times 200 \times 7.96$	0	341	187	0	21	639	2486
R-2	$300 \times 200 \times 7.96$	0	341	187	0.15	24	636	2233
R-3	$300 \times 150 \times 7.96$	0	341	187	0	16	750	1906
R-4	$300 \times 150 \times 7.96$	0	341	187	0.15	20	786	1853
RP-1	$300 \times 200 \times 7.96$	13	341	187	0	104	500	2486
RP-2	$300 \times 200 \times 7.96$	20	341	187	0	146	506	2486
RP-3	$300 \times 150 \times 7.96$	13	341	187	0	78	530	1906
RP-4	$300 \times 150 \times 7.96$	22	341	187	0	122	529	1906
SP-1	$219 \times 219 \times 5.30$	17	246	200	0	169	668	950
SP-2	$350 \times 350 \times 7.70$	11	286	183	0	140	504	2700
SP-3	$350 \times 350 \times 7.70$	7	284	183	0.3	109	586	1670

La couche de protection présentait une conductivité thermique  $\varphi_{pr} = 0.116 \text{ W/(m K)}$ , une chaleur spécifique  $C_{p_{pr}} = 1047 \text{ J/(kg K)}$  et une densité de  $\rho_{pr} = 400 \text{ kg/m}^3$ . Lors des essais, les poteaux étaient rotulés aux appuis et la longueur exposée au feu était de 3000 mm.

A partir des résultats de leur campagne expérimentale, [Han *et al.*, 2003] ont remarqué que les deux paramètres prépondérants dans le calcul de la tenue au feu des poteaux est la géométrie de l'élément et la présence d'une couche de protection thermique. Ainsi, il faut environ 104 minutes à RP-1 pour atteindre 500 °C et 73 minutes pour RP-3, tandis qu'en l'absence de protection, R-1 ne met que 21 minutes pour atteindre 639 °C. A partir d'une régression linéaire, [Han *et al.*, 2003] proposent la formule (1.12) pour déterminer la couche de protection thermique :

$$t_{pr} = \left(2.5 r^{th} + 22\right) l_{peri}^{-(0.42+0.0017 \varphi - 2 \cdot 10^{-5} \varphi^2)} \quad (1.11)$$

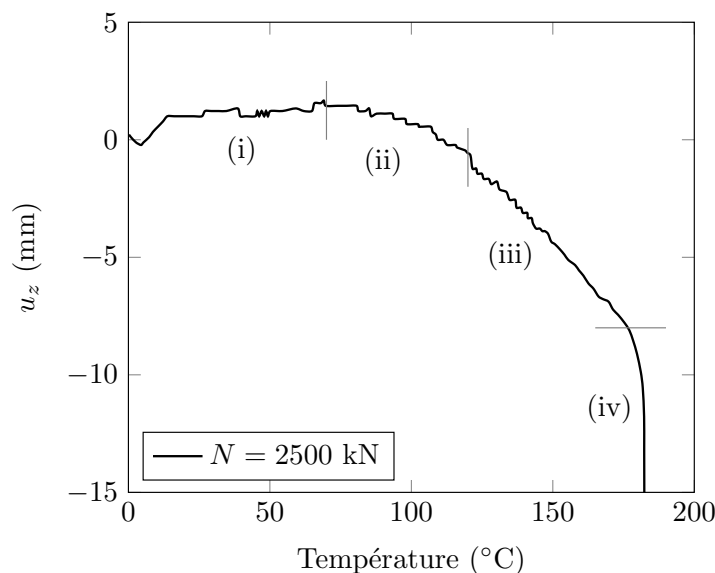
Avec  $r^{th} \leq 180 \text{ min}$ ,  $l_{peri} \in [800, 8000 \text{ mm}]$  le périmètre de la section et  $\varphi = 2 \sqrt{3} l/b$  le ratio d'élancement compris entre 15 et 80. Les conditions suivantes doivent également être vérifiées :  $\rho_w = A_a/A_b \in [0.04, 0.2]$ ,  $\sigma_y \in [200, 300 \text{ MPa}]$  et  $\sigma_{bk}^{cp} \in [20, 80 \text{ MPa}]$ .

[Kodur, 1999] suggère de renforcer les poteaux avec des armatures passives en cas de chargements excentrés. Il remarque également qu'utiliser des granulats carbonatés pour le béton augmente la résistance au feu d'environ 10% par rapport à des granulats siliceux. Des explications sur ces différences de comportement apparaissent dans les recherches de [Hager, 2004] et de [Mindeguia, 2009]. Par ailleurs, [Kodur et Lie, 1997] se sont intéressés à l'emploi de béton fibré mais précisent que cette variante ne présente d'intérêt que pour assurer une tenue au feu supérieure aux deux heures réglementaires. Enfin, [Kodur et Mackinnon, 1999] proposent un critère de dimensionnement simple :

$$r^{th} = \gamma_1 \frac{\sigma_{bk}^{cp} + 20}{k_{eff} l_x - 1000} l_y^2 \frac{\sqrt{l_y}}{N} \quad (1.12)$$

Où  $r^{\text{th}}$ , la résistance est donnée en minutes,  $\sigma_{\text{bk}}^{\text{cp}}$  en MPa.  $l_y$  la largeur (ou le diamètre) et  $l_x$  la longueur sont données en millimètres.  $k_{\text{eff}}$  est le facteur de longueur efficace (issue de la norme canadienne CAN/CSA-S16.1-M89) et  $\gamma_1$  un coefficient dépendant de la section, du type de béton et de la nature des granulats. Pour une section carrée,  $\gamma_1 = 0.06$  pour des granulats siliceux et 0.07 pour des granulats carbonatés.

Pour finir, [Moon *et al.*, 2009] se sont concentrés spécifiquement sur le comportement des voiles en SCs, comprimés et sollicités à l'incendie. Les chercheurs ont réalisé deux essais à échelle 1 : 1. Au cours de leur expérimentation, ils ont observé le déplacement de la face latéralement et ont relevé quatre phases dans la réponse (figure 1.13). Premièrement, le déplacement augmente à cause de la dilatation thermique des matériaux non endommagés, acier et béton travaillent de façon composite (i). Ensuite le voile se contracte sous l'effet du flambement des plaques d'acier (ii). Le béton reprend alors la totalité de l'effort de compression (iii) jusqu'à ruine de la structure (iv).



**FIGURE 1.13:** Réponse d'un SC au chargement incendie + compression [Moon *et al.*, 2009]

Les modes de ruine liés à l'incendie observés au cours des expériences de [Moon *et al.*, 2009] comprennent le flambement local des plaques d'acier, l'écaillage du béton, la fragilisation des cordons de soudure au niveau des connecteurs (goujons, tirants).

Les résultats expérimentaux, appuyés d'études numériques ont suggéré que le critère dimensionnant était le ratio d'effort  $N/(A_b \sigma_{\text{bk}}^{\text{cp}})$ . [Moon *et al.*, 2009] certifient qu'à condition de respecter les recommandations minimales de la littérature,  $N/(A_b \sigma_{\text{bk}}^{\text{cp}}) \leq 0.4$  suffit à garantir la tenue du voile à l'incendie pour une durée de deux heures. Pour les autres cas, les auteurs recommandent l'utilisation de simulations numériques et renvoient vers les for-

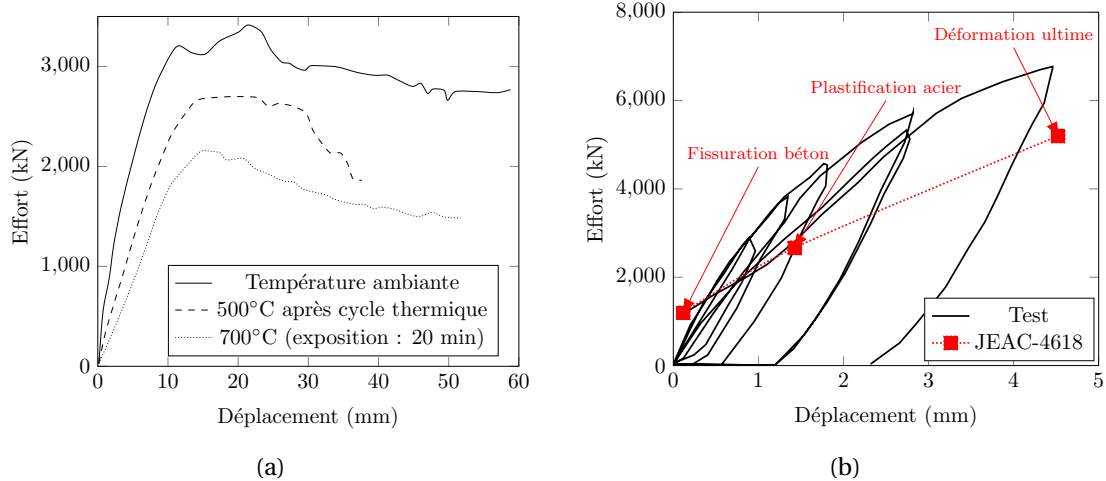
mules établies par [Kodaira *et al.*, 2003] :

$$\frac{N}{A_b \sigma_{bk}^{cp}} = 2.21 \left( \frac{1}{\tau} \right)^{0.323} \quad \text{si } l_x / t = 9 \quad (1.13a)$$

$$\frac{N}{A_b \sigma_{bk}^{cp}} = 2.30 \left( \frac{1}{\tau} \right)^{0.378} \quad \text{si } l_x / t = 15 \quad (1.13b)$$

**Résistance au cisaillement :** [Katoh *et al.*, 2011] réalisent une campagne expérimentale aux températures élevées dans laquelle ils étudient la réponse au cisaillement hors-plan et au cisaillement dans le plan.

Dans le cas du cisaillement hors-plan, des éléments SCs de poutres sont sollicités en flexion 4 points après avoir été soumis à un cycle thermique : élévation de la température à 700°C, retour à température ambiante puis chauffage à 500°C. Deux modes de ruines sont observés par les chercheurs : le flambement accompagné de plastification de la plaque chargée mécaniquement (i) et la fissuration du béton tendu (ii). La réponse des éléments SCs testés est ductile, même aux températures élevées ce qui est permis par le remplissage béton. Cependant, la température affecte considérablement la résistance des spécimens comme en témoigne la figure 1.14a. [Katoh *et al.*, 2011] ont proposé des variantes dans lesquelles des plaques de partition confinent le béton et prodiguent une résistance et une ductilité accrue à la structure .



**FIGURE 1.14:** Essais de cisaillement hors-plan (a) et dans le plan (b) avec chargement thermique [Katoh *et al.*, 2011]

Pour finir, les chercheurs ont étudié la réponse au cisaillement dans le plan. Pour cela ils ont préparé un spécimen de poutre en H qu'ils ont porté à 700°C. Après son refroidissement, le spécimen a été sollicité en cisaillement pur. Lors de cet essai, le flambement des plaques s'est produit. Cependant la limite en déformations admissibles imposée par le JEAC-4618 à température ambiante n'a pas été atteinte malgré l'échauffement préalable (figure 1.14b).

## 3.2 Comportement à température modérée

Récemment, des chercheurs américains se sont intéressés au comportement des structures modulaires soumises à des sollicitations thermiques modérées (voir figure 1.5-a). Leurs études portent exclusivement sur des voiles et présentent des approches numériques [Varma *et al.*, 2009] et expérimentales [Varma *et al.*, 2011a, Varma *et al.*, 2013b]. Dans ces études, un chargement mécanique est considéré en plus de la température afin de représenter la pression induite par un accident de type perte de réfrigérant primaire (APRP).

### 3.2.1 Données expérimentales

Plusieurs campagnes expérimentales ont été réalisées par [Booth *et al.*, 2007, Varma *et al.*, 2011a, Varma *et al.*, 2013b]. Dans leurs expériences, ces auteurs considèrent des poutres sollicitées en flexion quatre points et portées à des températures modérées allant de 150°C à 232°C. La source de température est placée à des endroits différents selon l'objectif de chaque essai. Pour une étude portant sur l'effet de la température sur la réponse flexionnelle de la structure, la source de chaleur est placée entre les vérins (figure 1.16a), au droit de la zone dans laquelle le moment est constant. Pour évaluer les effets de la température sur la réponse au cisaillement hors-plan, la zone chauffée est placée à proximité d'un vérin appliquant l'effort mécanique (figure 1.16b).

Le scénario de chargement est le suivant : d'abord les éléments sont sollicités mécaniquement jusqu'à ce que le moment appliqué corresponde à celui qui serait obtenu pour une pression de 0.07 MPa correspondant à l'accident grave (i). Ensuite la structure est portée à 150°C en 12 minutes et maintenue 2 heures sans modification de la charge appliquée (ii). Enfin, le chargement est augmenté afin d'atteindre un équivalent pression de 0.25MPa, trois fois supérieur à la pression de dimensionnement (iii). Dans une variante de l'essai, [Varma *et al.*, 2013b] modifient l'étape (i) en réalisant un cycle chargement - déchargement - chargement et chauffent par les deux côtés lors de l'étape (ii).

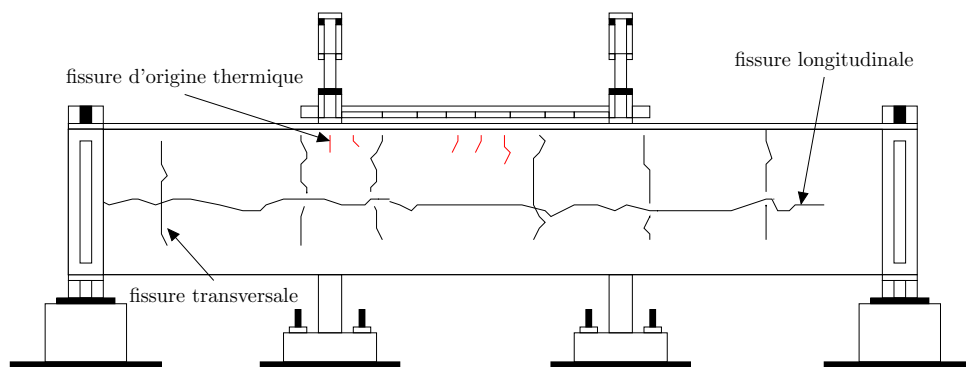
Des détails suffisants ne sont fournis que pour les spécimens sollicités thermiquement ST1 et ST2 de [Booth *et al.*, 2007] dont les dimensions sont 6300 × 800 × 800 mm ; et ST3 [?] : 7300 × 800 × 800. Ces éléments présentent des plaques d'épaisseur  $t_p = 11\text{mm}$  et l'espace-ment entre les goujons s'élève à 150mm. Ni les spécimens ST4 et ST5 de [Varma *et al.*, 2013b], ni les éléments testés à froid pour établir des comparaisons avec les réponses de ST3, ST4 et ST5 ne sont décrits. Outre les goujons, chaque poutre citée présente des plats soudés entre les deux plaques pour assurer la reprise des efforts de cisaillement. Les espacements de ces plats sont de 750mm pour ST1 et ST2, 1200mm pour ST3.

Au cours des essais, le déplacement vertical était mesuré à l'aide de LVDTs. Des thermocouples assuraient l'acquisition des températures tandis que les rotations et les déformations étaient obtenues à l'aide respectivement d'inclinomètres et de jauges de déformation. [Booth *et al.*, 2007] ont observé avant l'essai la présence de fissures importantes liées au retrait (figure 1.15). En particulier une grande fissure longitudinale et plusieurs fissures transversales situées au droit des plats métalliques soudés. Les chercheurs soupçonnent la réduction de la section de béton à cause des connecteurs traversants d'être à l'origine de ces fissures. La présence des connecteurs pourraient alors être à l'origine de problèmes d'in-



compatibilités des déformations entre le béton se rétractant et le connecteur ne se rétractant pas.

Pendant la phase de montée en température, [Booth *et al.*, 2007] et [Varma *et al.*, 2011a] ont observé l'apparition de petites fissures (250 mm) dans la zone chauffée (figure 1.15). Selon les explications des chercheurs, elles provenaient du gradient thermique et permettaient à la vapeur de s'échapper. [Booth *et al.*, 2007] proposent un schéma du montage illustrant la fissuration. Ce schéma est repris ici par la figure suivante :



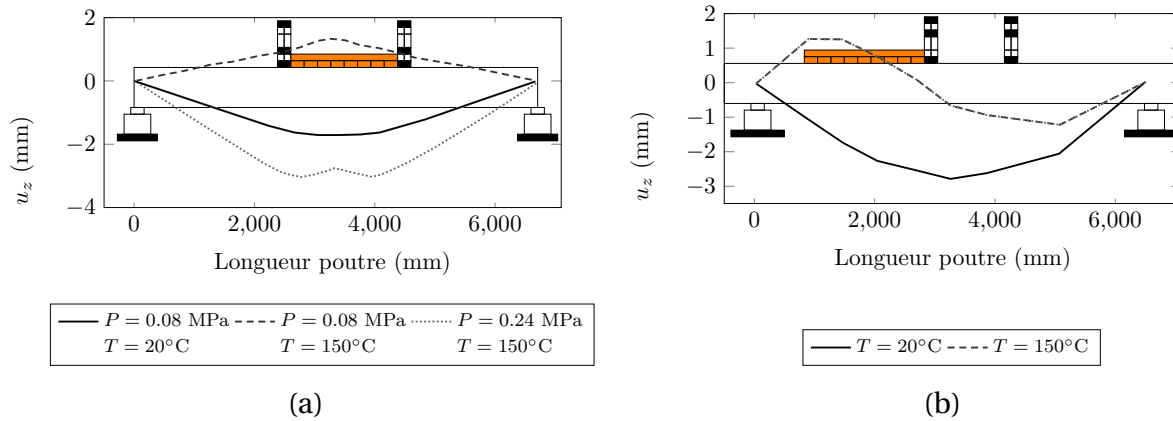
**FIGURE 1.15:** Fissuration liée au retrait et au gradient thermique [Varma *et al.*, 2011a]

L'observation des fissures d'origine thermique a conduit [Booth *et al.*, 2007] à supposer que la section de béton ne travaille pas et que la totalité des efforts est reprise par les plaques en acier. Les essais indiquaient une perte de raideur de flexion d'environ 14% après chauffage. Pour finir, il est apparu qu'au chargement représentatif d'une pression de 0.07MPa, les spécimens testés sont restés intègres. La ruine se produisant à 0.25MPa, ce qui suggère que les éléments SCs disposent d'une réserve de résistance en cas d'accident grave sous couvert de bon dimensionnement. Pour les spécimens testés, aucune perte de raideur brutale, ruine des connecteurs ou flambement local n'ont été relevés par les chercheurs.

Pour les spécimens ST3 et ST5 étudiés au cisaillement, les conclusions se sont avérées contradictoires. [Varma *et al.*, 2011a] ont appliqué une pression équivalente de 0.25MPa simultanément à une température de 150°C à ST3. Les chercheurs ont comparé les résultats après chauffage avec des données issues d'un essai équivalent mené à température ambiante<sup>4</sup>. Cette étude n'a pas révélé d'influence singulière de la température sur la résistance au cisaillement hors-plan (figure 1.17). Pour ST5, [Varma *et al.*, 2013b] ont observé une baisse de la résistance et de la raideur dans la réponse de la structure après élévation de la température (figure 1.17). Les chercheurs suggèrent que ce changement de comportement provient du cycle mécanique de charge-décharge-charge imposé au spécimen ST5 avant application de la température. Ce chargement cyclique aurait résulté en une fissuration diagonale plus importante avant chauffage qui se serait propagé sous l'effet de la température. Il convient de rappeler que la température imposée était plus élevée (232°C) pour

4. Les spécimens testés à température ambiante seront nommés S3, S4 et S5 en écho à ST3, ST4 et ST5.

ST5 que pour ST3. [Varma *et al.*, 2013b] ont remarqué qu'au cours de leurs essais, les fissures générées par la température et initialement perpendiculaires aux plaques (figure 1.15) se réorientaient sous l'effet de la mécanique à 45 – 60° pour correspondre à un mode de ruine par cisaillement. Enfin, la montée en température d'un élément composite provoque un déplacement hors-plan (figure 1.16), orienté vers la source de chaleur dont l'amplitude maximale est atteinte au centre de la région chauffée.



**FIGURE 1.16:** Déformée sous sollicitation thermo-mécanique : ST1 [Booth *et al.*, 2007] (a) , ST3 [Varma *et al.*, 2011a] (b)

A partir des observations effectuées lors des essais, [Varma *et al.*, 2009, Varma *et al.*, 2011a] ont proposé des expressions analytiques en vue d'estimer le comportement des éléments modulaires dans le cadre de l'accident grave.

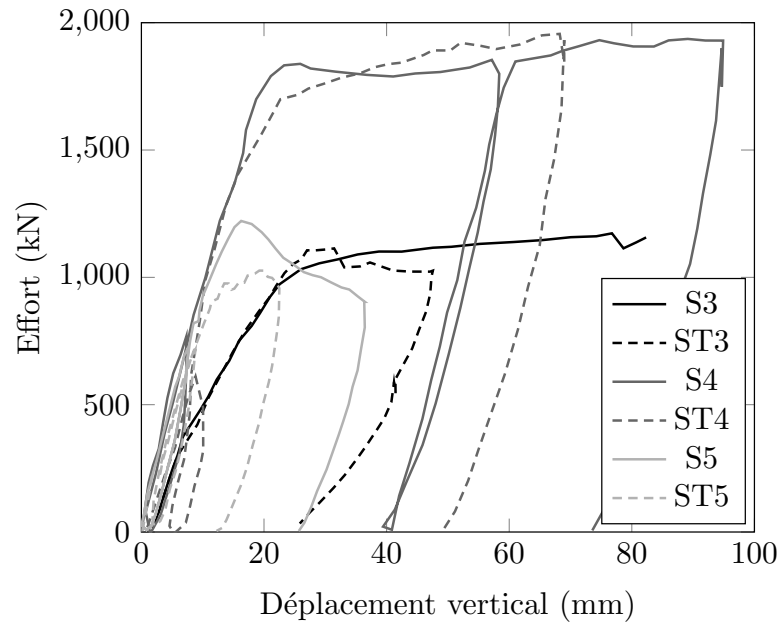
### 3.2.2 Prédiction analytique du comportement des SCs aux températures modérées

La fissuration du béton à 200°C suggère la perte de ses propriétés de résistance. Il revient alors aux plaques en acier d'assurer le rôle structural en reprenant les efforts de flexion et de cisaillement induits par la pression.

Pour estimer le comportement d'un voile SC, [Varma *et al.*, 2009] proposent une loi Moment-courbure thermique. Le modèle analytique proposé repose sur les hypothèses suivantes : les sections planes restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre avant et après montée en température (i), la section transverse peut être discrétisée en couches (ii) qui ne glissent pas les unes par rapport aux autres (iii) et les déformations de cisaillement sont faibles (iv). Pour chaque couche, les déformations totale ( $\epsilon^{\text{tot}}$ ) et thermique ( $\epsilon^{\text{th}}$ ) sont calculées afin d'en déduire la déformation élastique ( $\epsilon^e = \epsilon^{\text{tot}} - \epsilon^{\text{th}}$ ). Le moment ( $M$ ) peut ensuite être calculé. [Varma *et al.*, 2009] remarquent que lorsque  $M = 0$ ,  $\epsilon^e \geq 0$ . A cet instant la section du voile est intégralement tendue. Il en résulte que l'équilibre des efforts n'est possible que si dans la plaque d'acier exposée  $\epsilon^e = \epsilon^{\text{th}}$  ce qui permet de définir la courbure

thermique :

$$\kappa^{\text{th}} = \frac{\beta_a \Delta T_a}{t - t_p} \quad (1.14)$$



**FIGURE 1.17:** Influence de la température sur la résistance mécanique  
[Varma *et al.*, 2011a, Varma *et al.*, 2013b]

Ayant considéré l'absence de contribution du béton fissuré à la réponse structurale, en présence de températures modérées, [Varma *et al.*, 2009] proposent de ne tenir compte que de la raideur de flexion relative à l'acier  $E I^{\text{fiss}} = E_a \frac{l_y t_p^3}{6}$ . Le moment thermique s'écrit alors :

$$M^{\text{th}} = \frac{\beta_a \Delta T_a}{t - t_p} E I^{\text{fiss}} \quad (1.15)$$

Une comparaison avec les structures béton armé classique (RC) montre que la loi moment-courbure des SCs est moins influencée par le gradient thermique que celle des RCs mais qu'à quantité d'acier équivalente, le moment thermique des SCs est le plus important.

Afin de tenir compte d'une évolution de la raideur en flexion avec la température, [Varma *et al.*, 2011a] proposent de réaliser une interpolation linéaire fonction de la température entre  $(E I_H)$  et  $(E I^{\text{fiss}})$ , où  $(E I_H)$  est la raideur en flexion de la section homogénéisée calculée à température ambiante. En se plaçant dans les hypothèses définies en 2.1.2 et en supposant que  $t_{p-} = t_{p+} = t_p$ , l'expression (1.5) se simplifie en :

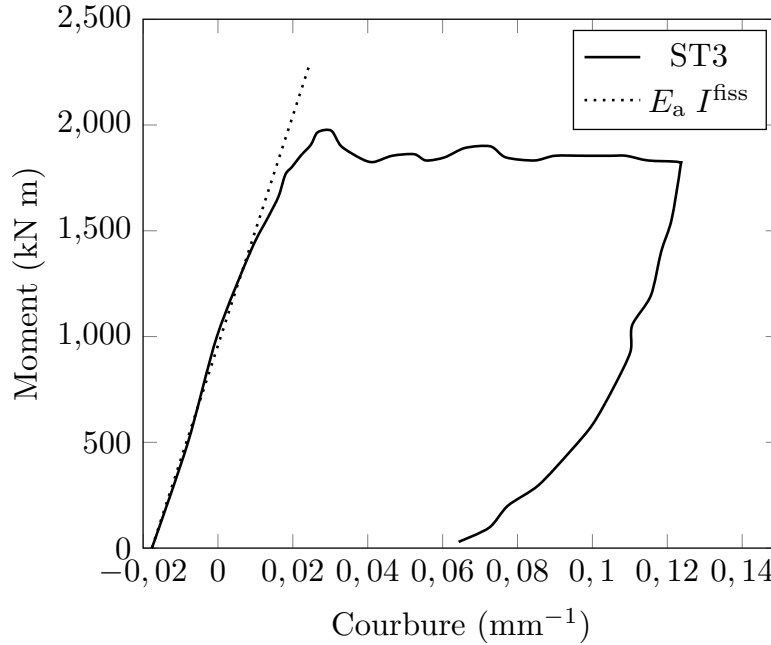
$$X/t = \sqrt{z'^2 + z'} - z' \text{ avec } z' = \frac{2 t_p}{t} \frac{E_a}{E_b}.$$

Ce qui mène à  $E I_H = E_a \left[ l_y t_p t^2 \left[ 1 + 2 \left( \frac{X}{t} \right)^2 - 2 \frac{X}{t} - \frac{t_p}{t} \right] + \frac{4 t^3}{n} \left( \frac{X-t_p}{t} \right) \right]$ . Il vient en fonction de la température :

$$\begin{aligned} K^{fl}(T_0) &= E I_H \\ K^{fl}(T) &= E I_H \left( 1 - \frac{\Delta T}{150} \right) \text{ si : } T_0 < T < 150^\circ F \text{ (soit } 66^\circ C) \\ K^{fl}(T) &= E I^{fiss} \text{ si : } T \geq 150^\circ F \end{aligned} \quad (1.16)$$

On remarquera que [Varma *et al.*, 2011a] définissent le seuil de  $150^\circ F$  en prenant  $\varepsilon^{th} = 0.1\%$  correspondant à l'endommagement du béton tendu. L'application numérique  $\varepsilon^{th} = \beta_a \Delta T$  en prenant  $\beta_a = 6.45 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ F^{-1}$  mène à  $|\Delta T| = 15^\circ F$  (soit un accroissement d'environ  $10^\circ C$ ). On sera donc prudent dans l'utilisation de la relation (1.16).

Des comparaisons entre la valeur prédite par l'équation (1.15) et les résultats expérimentaux obtenus à partir des inclinomètres [Varma *et al.*, 2011a, Varma *et al.*, 2013b] tendent à valider l'expression du moment thermique (figure 1.18).



**FIGURE 1.18:** Loi moment-courbure expérimentale (ST3) et prédiction théorique par (1.15) [Varma *et al.*, 2013b]

[Varma *et al.*, 2011a] ont très succinctement abordé la question du cisaillement hors-plan en se ramenant au modèle tri-linéaire présenté en 2.2.2. Les chercheurs proposent de supprimer la première branche correspondant à la contribution du béton en se référant aux travaux de [Ozaki *et al.*, 2000].

Pour finir, [Varma *et al.*, 2013a] ont abordé la question du flambement d'origine thermique. L'étude consiste en une modélisation du phénomène et l'influence de la température sur la reprise des efforts de compression par les voiles. A partir des simulations numériques,

les chercheurs ont montré qu'en absence de voilement local (sous condition de bon dimensionnement) les températures modérées avaient peu d'incidence sur la reprise des efforts. Cependant ; [Varma *et al.*, 2013a] rapportent que lors des campagnes expérimentales réalisées par [Sekimoto et Kondo, 2001] la ruine par voilement local sous l'effet de la température a pu être observée. Le spécimen concerné présentait un ratio  $\varphi = s/t_p = 45$ . Le déplacement mesuré était d'environ 7mm pour une augmentation de la température de 105°C.

La présentation des travaux ayant trait au comportement à température élevée montre que la question a été assez peu abordée comparativement aux performances mécaniques à température ambiante. Les études effectuées présentent des conclusions encourageantes quant aux performances des éléments modulaires à l'incendie ou soumis à des températures élevées. Cependant, on constate que parmi les hypothèses généralement admises par les chercheurs pour développer des formules analytiques, l'absence de flambement local du panneau est sous-entendue. Or, le phénomène a été observé expérimentalement.

## Conclusion partielle

Le présent chapitre a permis de présenter la technologie de construction modulaire appelées SC structure. Ces éléments constitués de deux plaques en acier, d'un cœur de béton et de connecteurs ouvrent de nouvelles perspectives en termes de constructibilité.

Leur conception atypique, permet une modularisation du chantier. La préfabrication des éléments et leur assemblage sur site offrent des gains importants en terme de vitesse d'exécution des chantiers et une réduction du personnel ainsi qu'une meilleure maîtrise de la sécurité. Cependant, leur utilisation bouleverse les habitudes établies en faisant intervenir des instruments de levage contraignants et offrant peu de latitudes à d'éventuelles modifications in-situ. Cela conduit à réorganiser le chantier et à prévoir de larges zones de maintenance. Il permet également de développer la co-ingénierie et la préfabrication, ce qui soulève des contraintes complémentaires sur les tolérances de pose et le clavage.

Leur concept original présente un intérêt particulier dans le domaine du nucléaire civil puisque l'externalisation des plaques en acier garantit l'étanchéité de la structure et le confinement des radio-éléments. Ces structures seraient particulièrement adaptées à la conception de SFRs et le phasage du chantier, très réglé, particulièrement adapté au développement d'offres à destination des marchés des pays à forte croissance économique.

Si, à température ambiante, ces éléments ont démontré d'intéressantes propriétés mécaniques grâce à leur importante ductilité, l'externalisation des plaques les rend tout particulièrement vulnérables au voilement local. Ce phénomène constitue alors un mode de ruine spécifique aux éléments modulaires qui doit être étudié avec soin.

Ce constat est d'autant plus vrai pour une utilisation dans un bâtiment réacteur ou un bâtiment de stockage combustible où peuvent survenir des accidents impliquant des températures atteignant jusqu'à 180°C. La littérature montre que le sujet a été très rarement abordé du point de vue de la thermique, les chercheurs renvoyant généralement aux "bonnes pratiques" de dimensionnement et étudiant des structures très surdimensionnées du point de vue du phénomène (plaques épaisses de 10mm pour des espacements de connecteurs de

150mm). Ce constat et la volonté d'optimiser le dimensionnement des SCs à conduit à la définition des travaux de thèse décrit dans ce manuscrit. Par ailleurs, dans la littérature, très peu de modèles analytiques développés pour les SCs intègrent de manière fine les non-linéarités du problème global.

Nous nous attacherons dans la suite à mieux appréhender le phénomène du flambement thermique<sup>5</sup> que nous étudierons à l'aide de simulations numériques. Les résultats des simulations nous amèneront à définir des propositions de critères analytiques pour offrir des outils de pré-dimensionnement à l'ingénieur. Enfin, les résultats analytiques et numériques seront confrontés aux données issues d'une campagne expérimentale locale.

---

5. Dans la suite nous nommerons flambement thermique, le phénomène de flambement induit par l'état de contraintes résultant d'une augmentation de la température.



## Chapitre II

# Conception d'un modèle numérique du voilement local thermique

*Ce chapitre expliquera l'approche retenue pour simuler numériquement le phénomène de voilement thermique. Nous présenterons la stratégie de résolution et les hypothèses des modèles mécanique et thermique. Enfin la question du couplage thermo-mécanique sera abordée en détails.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Problème d'instabilité géométrique . . . . .</b>	<b>47</b>
1.1	Critères de détection d'instabilité par analyse de sensibilité . . . . .	48
1.2	Méthodes de résolutions continues . . . . .	51
<b>2</b>	<b>Comportements matériaux . . . . .</b>	<b>55</b>
2.1	Modélisation de l'acier jusqu'à 200°C . . . . .	55
2.2	Modélisation du béton jusqu'à 200°C . . . . .	60
2.3	Comportement aux interfaces . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Couplage thermo-mécanique . . . . .</b>	<b>70</b>
3.1	Écriture du problème couplé aux éléments finis . . . . .	70
3.2	Estimation analytique de la déviation sur la température . . . . .	76
3.3	Validation par comparaison avec les résultats numériques . . . . .	80

---



## Introduction au chapitre II

L'étude du voilement thermique que nous proposons dans la suite de ce travail de thèse repose notamment sur l'utilisation de l'outil numérique. Nous distinguerons pour nos études deux échelles illustrées par la figure 2.1. L'échelle globale correspond à la structure SC de type voile décrite par la figure 1.4. L'échelle locale se situe au niveau du panneau élémentaire compris entre ses quatre connecteurs.

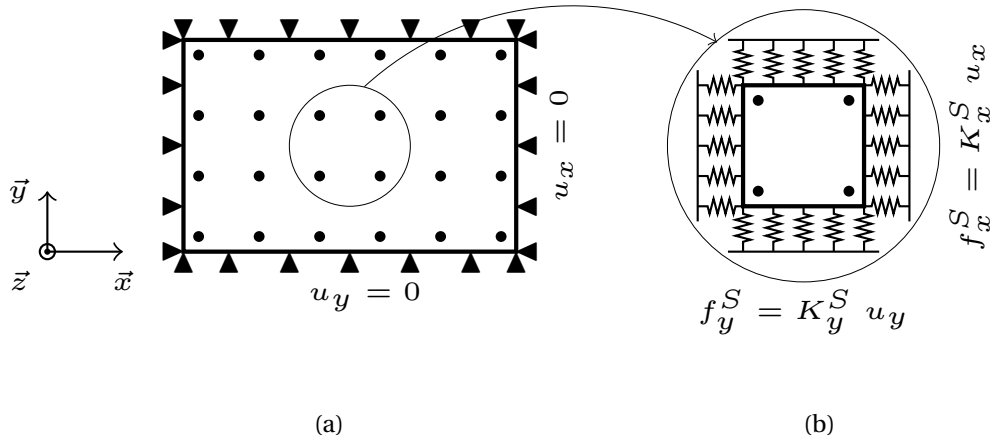


FIGURE 2.1: Structure SC : situation à l'échelle globale (a), locale (b)

Les conditions limites appliquées correspondent à un bridage des déplacements au bord pour les modèles globaux. Ce choix cherche à reproduire, à la façon des méthodes d'ingénieries usuelles, le bridage mécanique imputable aux connexions entre le voile SC et les autres éléments structuraux (voiles, planchers, radier et toiture). Au niveau local, des ressorts sont introduits au bord de l'élément afin de brider les déplacements. L'influence des raideurs  $K_x^S$  et  $K_y^S$  sera détaillée dans le chapitre III.

Le présent chapitre a pour objectif d'exposer les hypothèses et de justifier les approximations retenues dans les simulations numériques de voilement.

Or l'étude de ce phénomène requiert l'utilisation de modèles très fortement non linéaires : la présence de fortes instabilités matérielles et géométriques nécessitent l'utilisation de techniques de résolution appropriées pour établir la convergence de la réponse en régime post-critique. Ces problèmes d'instabilité seront détaillés dans une première partie.

Une seconde partie sera consacrée aux comportements matériaux. Outre l'acier et le béton dont les comportements non linéaires sont affectés par la température, les éléments SCs, à cause d'une conception atypique, présentent un certain nombre d'interfaces. Un soin particulier doit être apporté à la modélisation de ces dernières, tant du point de vue de la mécanique que des transferts thermiques y siégeant.

Pour finir, la troisième partie de ce chapitre sera consacrée aux couplages thermo-mécaniques. Nous y justifierons le choix du schéma de couplage ainsi que les développements effectués afin de maîtriser les erreurs induites par ce couplage.

Ce chapitre s'appuie sur les trois annexes A (Résultats de l'analyse de stabilité), B (Étude comparative des lois bétons implémentées dans Code\_Aster) et C (Erreur de couplage : compléments aux développements en séries) qui offrent quelques approfondissements des concepts présentés dans le corps du texte à travers des études subsidiaires.

## 1 Problème d'instabilité géométrique

Les problèmes non linéaires sont généralement résolus par des méthodes d'analyse incrémentale ou des méthodes itératives de type Newton-Raphson. Ces stratégies de résolution réduisent le problème non-linéaire global à une succession d'approximations linéarisées. Ainsi, à l'instant  $\tau_{n+1}$ , connaissant l'état du système à l'instant précédent, le problème non linéaire s'écrit  $\underline{\underline{K}}_{n+1} \cdot \underline{u}_{n+1} = \underline{f}_{n+1}^{\text{int}} - \underline{f}_{n+1}^{\text{ext}}$ . Le calcul de la force résiduelle  $\underline{r}_{n+1} = \underline{f}_{n+1}^{\text{int}} - \underline{f}_{n+1}^{\text{ext}}$  donne une indication sur la violation de l'équilibre par l'approximation réalisée. On s'assurera que ce résidu remplit un critère d'acceptabilité à chaque étape de la résolution du problème non-linéaire. Lorsque l'état d'équilibre du système étudié est stable, la résolution d'un problème non linéaire par les stratégies citées précédemment ne pose pas de difficultés notoires. Cependant, cette stabilité ne peut être garantie tout au long du traitement du phénomène physique étudié. C'est notamment le cas des problèmes traités en grandes déformations.

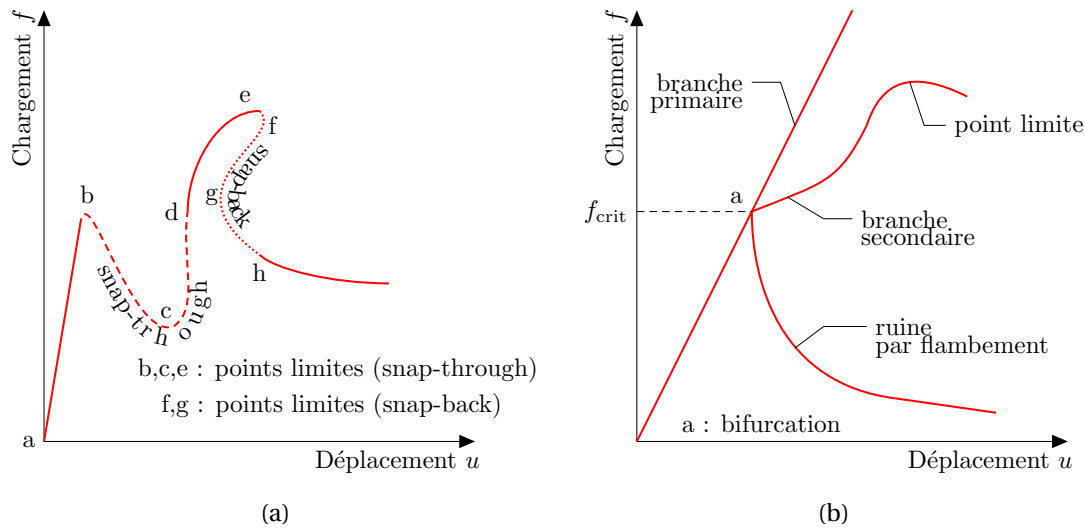


FIGURE 2.2: Instabilités matérielles (a) et instabilités géométriques (b)

L'état d'équilibre d'une structure chargée est considéré comme instable si l'introduction d'une petite perturbation du système se traduit par une modification du comportement ou une amplification démesurée de la réponse pour un accroissement faible du chargement. La matrice de raideur du problème  $\underline{\underline{K}}$  peut être décomposée en une partie géométrique

$\underline{K}_{\text{geo}}$  et une partie matériau  $\underline{K}_{\sigma}$ . Deux types d'instabilités seront alors distinguées dans la suite : en présence d'une matrice  $\underline{K}_{\sigma}$  singulière, on considérera des instabilités matérielles de type "snap-back" ou "snap-through" (figure 2.2a), ces dernières apparaissant notamment en présence de lois de comportement matériau adoucissantes (béton avec prise en compte de l'endommagement). En présence d'une matrice  $\underline{K}_{\text{geo}}$  singulière on parlera d'instabilités géométriques auxquelles appartient la problématique du flambement (figure 2.2b) que nous avons plus particulièrement à traiter.

Cette première partie présente les stratégies de résolution classiques des problèmes dans lesquels apparaît une instabilité de nature géométrique. Dans un premier paragraphe nous décrirons la méthode d'analyse de sensibilité. Nous nous interrogerons alors sur la pertinence de l'emploi de différentes méthodes au traitement du voilement thermique appliqué aux éléments SCs. Nous présenterons enfin les solutions numériques de résolution d'un problème aux limites en présence d'instabilité.

## 1.1 Critères de détection d'instabilité par analyse de sensibilité

Lorsqu'un élément de structure est sollicité par un effort de compression  $f$ , cet élément peut présenter deux sortes de réponse à une perturbation. Suite au retrait de cette perturbation, l'élément peut revenir en configuration initiale. L'équilibre structural est dit **stable**. Au contraire, avec le maintien du chargement compressif, la réponse structurelle risque de s'emballer et d'amplifier de façon continue la perturbation. L'équilibre est alors dit **instable**. L'effort qui marque la transition d'un état d'équilibre stable (respectivement instable) à un état d'équilibre instable (respectivement stable) est communément appelé **effort critique**  $f_{\text{crit}}$ .

La recherche de l'effort critique à ne pas dépasser correspond à la stratégie adoptée pour prévenir les phénomènes d'instabilité. C'est en particulier le cas du flambement, pour lequel les chercheurs ont développé des méthodes analytiques ou numériques, présentées dans la suite [Riks, 1978, Riks, 1984, Ibrahimbegovic, 2006b]

### 1.1.1 Flambement linéaire

Ce premier problème d'instabilité correspond au flambement d'Euler pour lequel des solutions analytiques existent. Classiquement, on fait subir à une poutre comprimée de longueur  $l$  une perturbation sous forme de déplacement transversal  $w$ . Le principe de la résolution s'appuie sur la combinaison des équations linéaires cinématiques en configuration déformée et de comportement avec l'équation d'équilibre [Ibrahimbegovic, 2006b]. Pour cela on exploite la relation cinématique définissant la courbure  $\kappa$  à partir de la déformée :  $\kappa = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ . On considère alors un matériau élastique  $\sigma(x, y) = E\varepsilon(x, y)$  et la cinématique du modèle d'Euler en petites perturbations  $\varepsilon(x, y) = y\kappa(x)$ . L'expression du moment en fonction de la courbure s'obtient à partir de  $M = \int_A y \sigma dA = EI w_{,xx}$  où le module d'inertie  $I = \int_A y^2 dA$ . Injecter cette dernière relation dans l'équation d'équilibre permet d'obtenir la

charge critique d'Euler (2.1) pour une instabilité géométrique se produisant par bifurcation

$$E I \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f w = 0; w(0) = w(l) = 0 \rightarrow \begin{cases} w_{\text{crit}}(x) = \pm \sin \frac{\pi x}{l} \\ f_{\text{crit}} = \pi^2 E I / l^2 \end{cases} \quad (2.1)$$

Les hypothèses réalisées correspondent à la classe des problèmes d'instabilité pour lesquels les déplacements restent petits avant d'atteindre le point critique. Elles se limitent alors aux structures simples, présentant une réponse linéaire élastique.

### 1.1.2 Flambement non linéaire

Lorsque les déplacements peuvent être importants<sup>1</sup> avant que l'état d'équilibre ne soit atteint ou lorsque les comportements matériaux sont non linéaires, il n'existe pas de solutions analytiques exactes de la formulation forte. La stratégie consiste à utiliser la méthode des éléments finis pour laquelle des critères de détection de la criticité existent.

**Critère de détection par annulation de la matrice tangente :** Le premier critère consiste à distinguer les états d'équilibre stables et instables. On observe qu'un comportement instable se manifeste par un incrément considérable du déplacement pour un faible incrément de chargement. Cette condition, pour être vérifiée, requiert l'annulation de la matrice tangente [Ibrahimbegovic, 2006b] :

$$\frac{\partial w}{\partial f} \mapsto \infty \text{ \& } f = f^{\text{int}} \implies \frac{\partial f^{\text{int}}}{\partial w} = K = 0 \quad (2.2)$$

Cette solution est néanmoins restreinte par la complexité du système étudié et peut rapidement s'avérer coûteuse.

**Critère de détection par l'énergie potentielle totale :** Dans le cadre des déformations finies, [Trefftz, 1926] a développé une théorie de la stabilité basée sur la théorie de l'élasticité. Afin de prédire la stabilité du système, le chercheur s'appuie sur un critère énergétique. Ainsi, un système peut être considéré comme stable au sens de Trefftz si la dérivée seconde de l'énergie potentielle totale est positive pour toute variation cinématiquement admissible des déplacements. La limite de stabilité est alors atteinte en cas de valeur nulle de cette dérivée seconde. À partir de ces considérations, [Koiter, 1945] a mis en place les bases de la théorie connue sous le nom de méthode des perturbations régulièrement employée dans la résolution de problèmes de flambement. À l'aide de développements en séries entières, les états d'équilibre au voisinage du point de bifurcation sont étudiés. En effet la présence de petites imperfections risque d'entraîner des états d'équilibres locaux instables. La structure globale encourt une perte de résistance au flambement contraire aux solutions idéales. Bien que de nature analytique, cette approche a été étendue aux modèles numériques dans les années 1960 [Riks, 1984].

1. On se reportera au paragraphe 2.1.1 du chapitre III pour le détail des cinématiques en grands déplacements

Soit  $\mathbf{F}$  l'application linéaire ponctuelle représentative de la transformation en grands déplacements. Soit  $\tilde{w}$  la perturbation introduite. Les première et seconde variations de l'énergie potentielle totale  $\Pi(\mathbf{F})$  sont données par (2.3) selon [Ibrahimbegovic, 2006b] :

$$\begin{aligned} D_{\tilde{w}} \Pi(\mathbf{F}) &= \frac{d}{d\varepsilon} [\Pi(\mathbf{F}_\varepsilon)]|_{\varepsilon=0} = G(\mathbf{F}; \tilde{w}) = \underline{\tilde{w}} \cdot (\underline{\hat{f}}^{\text{int}} - \underline{\hat{f}}^{\text{ext}}) = 0 \\ D_{\tilde{w}} [D_{\tilde{w}} \Pi(\mathbf{F})] &= \frac{d^2}{d\varepsilon^2} [\Pi(\mathbf{F}_\varepsilon)]|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} [G(\mathbf{F}_\varepsilon; \tilde{w})]|_{\varepsilon=0} = \underline{\tilde{w}}^t \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\tilde{w}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Où  $G(\mathbf{F}; \tilde{w})$  correspond à la formulation faible du problème formulée dans le cadre des éléments finis.  $G(\mathbf{F}; \tilde{w}) = \int_{\Omega} \underline{\hat{\varepsilon}}^{\mathbf{F}}(\tilde{w}) : \underline{\sigma}^{\mathbf{F}} d\nu - \int_{\Omega} \underline{\tilde{w}} \cdot \underline{b} d\nu - \int_{\Gamma} \underline{\tilde{w}} \cdot \underline{t} dA$  avec  $\underline{b}$  les efforts internes volumiques dans le volume  $\Omega$  et  $\underline{t}$  les efforts imposés aux limites  $\Gamma$  selon [Ibrahimbegovic, 2006a]. Un développement asymptotique de Taylor amène alors :

$$\Pi(\mathbf{F} + \tilde{w}) \approx \Pi(\mathbf{F}) + \underbrace{G(\mathbf{F}; \tilde{w})}_{=0} + \underline{\tilde{w}}^t \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\tilde{w}} \quad (2.4)$$

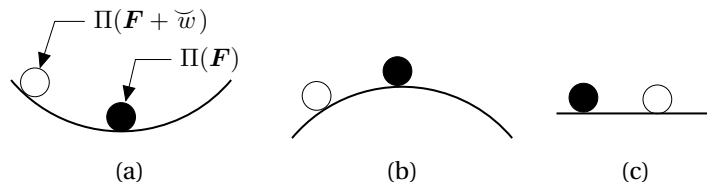
La stabilité de la réponse est donc pilotée par le terme  $\underline{\tilde{w}}^t \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\tilde{w}}$ . Ce constat fait le lien entre la formulation des éléments finis et la théorie de la stabilité de Trefftz. Le critère de stabilité peut alors être formulé en terme de matrice de raideur  $\underline{\underline{K}}$ . L'équation (2.5a) donne la condition de stabilité, (2.5b) la condition d'instabilité et (2.5c) la condition de criticité de l'état d'équilibre.

$$\Pi(\mathbf{F} + \tilde{w}) > \Pi(\mathbf{F}); \forall \tilde{w} \in \mathbb{V}_0 \Rightarrow \underline{\tilde{w}}^t \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\tilde{w}} > 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{K}} \text{ définie positive} \quad (2.5a)$$

$$\Pi(\mathbf{F} + \tilde{w}) < \Pi(\mathbf{F}); \forall \tilde{w} \in \mathbb{V}_0 \Rightarrow \underline{\tilde{w}}^t \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\tilde{w}} < 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{K}} \text{ définie négative} \quad (2.5b)$$

$$\Pi(\mathbf{F} + \tilde{w}) = \Pi(\mathbf{F}); \forall \tilde{w} \in \mathbb{V}_0 \Rightarrow \underline{\tilde{w}}^t \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\tilde{w}} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{K}} \text{ singulière} \quad (2.5c)$$

Avec  $\mathbb{V}_0$  l'ensemble des perturbations cinématiquement admissibles.



**FIGURE 2.3:** États d'équilibre stable (a), instable (b) et critique (c) [Ibrahimbegovic, 2006a]

Traditionnellement, dans les codes de calcul, le critère (2.5c) est modifié en choisissant le vecteur propre de  $\underline{\underline{K}}$  associée à la valeur propre nulle comme perturbation. (2.5c) revient alors à rechercher les modes propres du problème aux valeurs propres :

$$\left( \underline{\underline{K}} + \mu \underline{\underline{K}}_{\text{geo}} \right) \cdot \underline{x} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{K}} \cdot \underline{x} = \lambda \underline{\underline{K}}_{\text{geo}} \cdot \underline{x} \quad (2.6)$$

Où  $\lambda$  est la valeur propre ( $\lambda = -\mu$  avec  $\mu$  coefficient multiplicateur du chargement)

### 1.1.3 Application au flambement thermique de structures modulaires

Dans la suite de cette thèse, nous mènerons les études au niveau local et considérerons une maille élémentaire de structure modulaire (figure 2.1). La dilatation thermique est bridée aux bords. Ceci conduit à un état de compression de la plaque dans les deux directions, horizontale et verticale.

L'utilisation de la méthode décrite par l'équation (2.5c) ne permet pas de tenir compte de la présence du remplissage béton sur lequel la peau se met éventuellement en appui.

La réalisation d'une analyse de stabilité induit un mode de flambement générant des oscillations non physiques. Il est nécessaire d'introduire la condition de contact unilatérale  $w \geq 0$ , imposée par la présence du béton.

Cependant, réaliser une analyse de stabilité permet de connaître les allures des modes de flambement locaux et notamment du premier mode (Annexe A). La connaissance de cette donnée permettra dans la suite d'introduire un défaut conforme à ce mode et physiquement acceptable que l'on appliquera sur les nœuds du maillage pour les rendre conforme à la géométrie déformée.

## 1.2 Méthodes de résolutions continues

La méthode des perturbations ne peut être appliquée pour la caractérisation du voilement local des éléments de constructions modulaires. Par ailleurs, les solutions ne sont calculées par cette méthode qu'en un point particulier. Le comportement ne peut donc être connu qu'au voisinage de ce point.

[Riks, 1984] présente l'alternative des méthodes continues. Ces méthodes se fondent sur la détermination d'un certain nombre de points appartenant à la solution recherchée. On ne cherche alors plus spécifiquement les points critiques, mais à tracer le comportement post-critique en construisant la courbe approchée passant par la séquence connue de points exacts. La difficulté essentielle de la méthode consiste donc à déterminer un ensemble ordonné de points sur lesquels la solution va s'appuyer. Cette séquence de points  $\{\underline{x}(\eta_k)\}$  est calculée pour les  $n$  valeurs précisées d'un paramètre  $\eta_k$ ,  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Elle ne peut être connue arbitrairement ; aussi sa détermination s'appuie-t-elle sur des méthodes itératives en procédant par incrémentation à partir d'un état initial connu [Riks, 1984]. La stratégie de résolution s'appuie :

- (i) sur la construction d'un prédicteur :  $\underline{x}^0(\eta_k)$
- (ii) sur le calcul de la solution par une fonction itérative  $\mathcal{F} : \underline{x}^i = \mathcal{F}(\underline{x}^{i-1})$ ,  $i \in \llbracket 1, I \rrbracket$ .

Lorsque  $i = I$  tel que  $\underline{x}^i \approx \underline{x}(\eta_k)$  est jugée satisfaisante, la solution retenue est  $\underline{x}^i$  et la procédure avance d'un incrément  $\eta_{k+1} = \eta_k + \Delta\eta_k$ . [Riks, 1984] rappelle que la plupart des méthodes itératives ne sont convergentes que localement. Il est alors nécessaire que l'incrément  $\Delta\eta_k$  soit suffisamment petit pour que la solution prédictive extrapolée  $\underline{x}^0$  appartienne au domaine de convergence de la fonction  $\mathcal{F}$ .

Dans le cadre de la mécanique, la séquence recherchée correspond au déplacement  $u$  de la structure paramétré par le pseudo-temps  $\tau$ . On pose donc  $\underline{x} \equiv \underline{u}$  et  $\eta_k \equiv \tau_k$ ,  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

$\{\underline{u}(\tau_k)\}$  est alors déterminée en résolvant le système d'équations suivant :

$$\underline{r}(\underline{u}; \tau) = \underline{f}^{\text{int}} - \underline{f}^{\text{ext}}(\underline{u}(\tau)) = 0 \quad (2.7)$$

Soit le déplacement  $\underline{u}_k = \underline{u}(\tau_k)$  et sa dérivée première  $\underline{u}_{k,\tau} = \frac{\partial \underline{u}_k}{\partial \tau} |_{\tau=\tau_k}$  connus par la donnée d'un état initial ou le calcul. Le prédicteur à l'étape  $i$  peut être obtenu via un développement de Taylor :

$$\underline{u}_{k+1}^0 = \underline{u}_k + \Delta \tau \underline{u}_{k,\tau} \quad (2.8)$$

Une fonction itérative  $\mathcal{F}$  peut être construite en approchant  $\underline{r}(\underline{u}^i; \tau_{k+1})$  par un développement limité à l'ordre un autour de  $\underline{u}^i$  :

$$\underline{r}_{k+1}^{i+1} = \underline{r}(\underline{u}_{k+1}^{i+1}; \tau_{k+1}) \approx \underline{r}_{k+1}^i + \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{u}}|_{(\underline{u}^i; \tau_{k+1})} \cdot (\underline{u}_{k+1}^{i+1} - \underline{u}_{k+1}^i) = 0 \quad (2.9)$$

En posant  $\underline{K}_{k+1}^i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{u}}|_{(\underline{u}^i; \tau_{k+1})}$ , l'équation 2.9 peut s'écrire :

$$\underline{u}_{k+1}^{i+1} = \underline{u}_{k+1}^i - (\underline{K}_{k+1}^i)^{-1} \cdot \underline{r}_{k+1}^i \quad (2.10)$$

On reconnaît dans la fonction itérative  $\mathcal{F} : \underline{u}_{k+1}^i \mapsto \underline{u}_{k+1}^{i+1}$  définie par 2.10 la méthode de résolution de Newton classiquement utilisée en éléments finis [Abbas, 2013].

Tant que la matrice  $\underline{K}$  ne devient pas singulière au cours du trajet  $\{\underline{u}(\tau_k)\}$ , la méthode de résolution de Newton est un outil fiable. Cependant, l'équation (2.5c) rappelle que  $\underline{K}$  devient singulière lorsque l'instabilité géométrique se déclenche. Il est souvent nécessaire d'accompagner la méthode de Newton d'outils numériques supplémentaires tels que des méthodes de pilotage pour une paramétrisation adaptative du chargement ou de la recherche linéaire.

### 1.2.1 Pilotage par méthode de longueur d'arc

En présence d'instabilités matérielles ou géométriques, les méthodes de pilotage permettent de converger vers la réponse physiquement admissible (figure 2.2a) ou la branche dissipative (figure 2.2b).

La méthode générale consiste à proposer un paramètre  $\eta$  adaptatif lors de la recherche de la séquence  $\{\underline{u}(\eta_k)\}$  dont l'intensité dépend du comportement [Kazymyrenko, 2013]. Pour cela, le chargement imposé est décomposé en deux termes.

$$\underline{f}^{\text{ext}} = \underline{f}_0^{\text{ext}} + \zeta(\tau) \underline{f}_p^{\text{ext}} \quad (2.11)$$

Où  $\underline{f}_0^{\text{ext}}$  représente la part fixe du chargement,  $\underline{f}_p^{\text{ext}}$  la part pilotée du chargement, donnant uniquement sa direction et  $\zeta(\tau)$  une inconnue supplémentaire représentant l'intensité du chargement au cours du temps.

L'introduction d'une nouvelle inconnue requiert l'ajout d'une nouvelle équation pour la résolution du système. Une contrainte de pilotage est donc introduite pour stabiliser le comportement. Pour la méthode de pilotage par longueur d'arc, [Ibrahimbegovic, 2006b] formule cette contrainte :  $\mathcal{P}(\underline{u}; \zeta) = \sqrt{\|\underline{u}_{,\tau}\|^2 + |\zeta_{,\tau}|^2} = s_{,\tau}$ . Avec  $s_{,\tau}$  un paramètre défini par l'utilisateur imposant la vitesse du parcours de trajectoire. Lors de l'analyse incrémentale, le problème (2.7) devient :

$$\underline{r}(\underline{u}_{k+1}; \zeta_{k+1}) = \underline{f}_{k+1}^{\text{int}} - \left[ \left( \underline{f}_0^{\text{ext}} \right)_{k+1} + \zeta(\tau)_{k+1} \left( \underline{f}_p^{\text{ext}} \right)_{k+1} \right] = 0 \quad (2.12a)$$

$$\mathcal{P}(\underline{u}; \zeta) = \sqrt{\|\underline{u}_{k+1} - \underline{u}_k\|^2 + |\zeta_{k+1} - \zeta_k|^2} = \Delta s_{(k+1)} \quad (2.12b)$$

[Ibrahimbegovic, 2006b] fait remarquer que (2.12b) correspond à l'équation d'un cercle de rayon  $\Delta s_{k+1}$  centré sur la trajectoire à l'instant précédent. En observant que  $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \underline{u}} = \frac{\|\underline{u}_{,\tau}\|^2}{\mathcal{P}(\underline{u}; \zeta)} \frac{\underline{u}}{\|\underline{u}\|}$  et  $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \zeta} = \frac{|\zeta|^2}{\mathcal{P}(\underline{u}; \zeta)}$ , le problème défini par les équations (2.12a) et (2.12b) peut être résolu avec le schéma itératif  $\mathcal{S}$  suivant :

$$\mathcal{S} : (\underline{u}_{k+1}^i, \zeta_{k+1}^i) \mapsto \begin{cases} \underline{K}_{k+1}^i \cdot \underline{\Delta u}_{k+1}^i - \Delta \zeta_{k+1}^i \left( \underline{f}_p^{\text{ext}} \right)_{k+1}^i = \underline{f}_0^{\text{ext}} - \left( \underline{f}^{\text{int}} \right)_{k+1}^i \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \underline{u}} \cdot \underline{\Delta u}_{k+1}^i + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \zeta} \Delta \zeta_{k+1}^i = -\mathcal{P}(\underline{u}_{k+1}^i; \zeta_{k+1}^i) \end{cases} \quad (2.13)$$

Avec :  $\underline{\Delta u}_{k+1}^i = \underline{u}_{k+1}^{i+1} - \underline{u}_{k+1}^i$  et  $\Delta \zeta_{k+1}^i = \zeta_{k+1}^{i+1} - \zeta_{k+1}^i$ . Le système  $\mathcal{S}$  ainsi formulé permet de faire converger une solution correspondant à un état d'équilibre instable.

Cependant, [Kazymyrenko, 2013] remarque que lors de cette méthode, le chargement ne dépend plus directement du temps mais de la résolution entière du système non linéaire. La part pilotée du chargement doit donc être indépendante du temps physique. Dans le cas du flambement thermique des éléments modulaires, les contraintes exercées sur la structure sont générées par l'élévation en température. Cette dernière est corrélée au temps physique comme nous l'avons précédemment remarqué avec la figure 1.5. Cette dépendance rend inopérante la méthode de pilotage pour le problème de voilement thermique des SCs. Une solution consiste à remplacer le pilotage par un algorithme de recherche linéaire.

### 1.2.2 Algorithme de recherche linéaire

En l'absence de pilotage, les méthodes de recherche linéaire permettent d'empêcher la divergence de la méthode de Newton en cas de perte de raideur importante du système. Elles consistent à rechercher non plus un incrément de déplacement mais une direction de recherche  $\zeta$  dans laquelle l'énergie potentielle totale est minimisée.

Le principe de ces méthodes réside en un changement de métrique à l'aide de changements de variables afin de régulariser la surface définie par la fonctionnelle. Ceci permet de faciliter la descente vers le minimum de cette fonctionnelle. En effet, à chaque itération, la direction d'avancement est prise normale aux lignes d'isovaleurs et est dirigée dans le sens des valeurs décroissantes. [Abbas, 2013] illustre la pertinence des méthodes de recherche linéaire d'un exemple simple que nous reprenons ici.



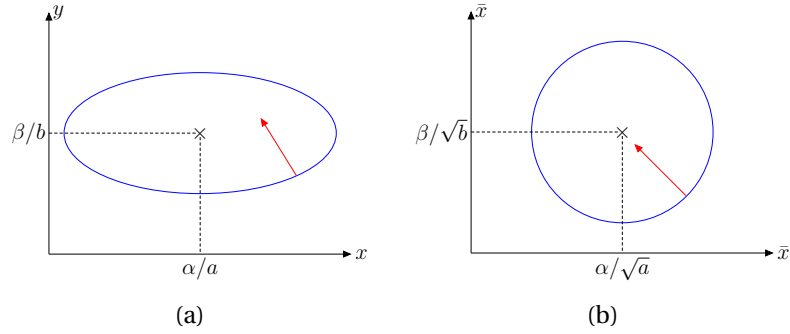


FIGURE 2.4: Direction de recherche du minimum de  $\mathcal{J}$  (a) et  $\tilde{\mathcal{J}}$  (b) [Abbas, 2013]

Soit la fonctionnelle  $\mathcal{J}(x, y) \mapsto \frac{1}{2} a x^2 + \frac{1}{2} b y^2 - \alpha x - \beta$ . Les lignes d'isovaleurs de cette fonctionnelle sont des ellipses. La normale à ces isovaleurs ne pointe généralement pas vers la solution se trouvant au centre de l'ellipse. Cependant en procédant au changement de variables  $\bar{x} = \sqrt{a} x$  et  $\bar{y} = \sqrt{b} y$ , l'équation de l'ellipse devient celle d'un cercle :  $\tilde{\mathcal{J}}(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \frac{1}{2} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) - \frac{\alpha}{\sqrt{a}} \bar{x} - \frac{\beta}{\sqrt{b}} \bar{y}$ . Le chemin passe par le centre en tout point de chaque isovaleur. L'utilisation de la direction opposée du gradient de  $\mathcal{J}$  dans une métrique bien choisie fournit la solution en une seule itération.

Les déplacements sont décomposés en une part connue d'un état antérieur  $\underline{u}_k$ , une part variable incrémentale donnant la direction de la recherche  $\underline{\delta u}_k$  et un coefficient  $\zeta$  représentant le pas d'avancement :

$$\underline{u}_{k+1}^i = \underline{u}_k^i + \zeta \underline{\delta u}_k^i \quad (2.14)$$

Le problème est résolu de manière itérative. Dans un premier temps,  $\underline{\delta u}_k^i$  est obtenu par la minimisation de la fonctionnelle définie par l'énergie potentielle totale du système :

$$\mathcal{J}(\underline{u}) = \frac{1}{2} \underline{u}^t \cdot \underline{K} \cdot \underline{u} - \underline{u}^t \cdot \underline{f}^{\text{ext}} \quad (2.15)$$

[Abbas, 2013] démontre que le problème de Newton défini par (2.10) et le problème 2.15 sont équivalents. Le même auteur précise que le coefficient  $\zeta$  est ensuite obtenu à partir d'une méthode sécante dont les bornes peuvent éventuellement être pré-déterminées.

Dans ces deux paragraphes, nous sommes revenus sur les solutions numériques permettant de résoudre communément les problèmes d'instabilités, en particulier de flambement. Les analyses de stabilité réalisées à l'aide de méthodes perturbatives sont limitées dans l'application des conditions limites cinématiques et aboutissent à des modes de flambement présentant des oscillations non physiques. Les charges critiques et les modes de flambement ne sont alors pas exploitables bien que des tendances semblent se dessiner. La littérature encourage l'utilisation de méthodes continues auxquelles appartient le schéma de résolution de Newton. Afin de remédier aux divergences que pourrait entraîner un état d'équilibre instable, cette méthode s'accompagne classiquement d'algorithmes de pilotage. Ces derniers ne sont pas exploitables dans le cadre de la modélisation du flambement thermique des

SCs suite à la dépendance au temps du chargement. Une solution est alors d'accompagner la résolution classique par une étape de recherche linéaire. Afin que l'instabilité puisse se déclencher lors de telles études numériques, de nombreux auteurs recommandent l'introduction d'un défaut dans le modèle [Wright, 1993, Rhodes, 2002]. Ce défaut prendra l'apparence d'une déformation du maillage. Il est choisi conformément au mode 1 local (figure A.2a) obtenu via l'analyse de stabilité, comme le préconisent [Liang *et al.*, 2004]. Le choix du système de résolution numérique étant établi, nous décrirons dans la suite les hypothèses retenues pour représenter les comportements matériaux.

## 2 Comportements matériaux

Dans la seconde partie du chapitre II nous présenterons les hypothèses effectuées pour représenter le comportement des matériaux dans le modèle numérique. Pour cela nous nous appuierons sur leur phénoménologie à températures ambiante et élevée que nous présenterons en perspective des modèles numériques implémentés dans Code\_Aster. Nous nous intéresserons successivement à l'acier, au béton et aux interfaces.

### 2.1 Modélisation de l'acier jusqu'à 200°C

Dans un premier temps, nous présenterons succinctement le comportement escompté de l'acier porté à haute température et les conséquences en terme de modélisation.

#### 2.1.1 Comportement élasto-plastique avec écrouissage isotrope

L'acier présente, à température ambiante un comportement dit "élasto-plastique". Celui-ci se manifeste par l'apparition de déformations permanentes passé un seuil de contraintes subies. Dans l'optique d'une élévation modérée de la température (200°C) la viscosité ne sera pas prise en compte. Un essai de traction permet de caractériser complètement le comportement unidimensionnel [Lemaitre *et al.*, 2009a]. En général deux allures sont observées : à palier (figure 2.5a) ou à module tangent continu (figure 2.5b).

Dans un premier temps, le matériau présente une réponse linéaire élastique (trajet OA figure 2.5a). Lorsque la limite d'élasticité  $\sigma_y$  est atteinte, la réponse devient non linéaire (trajet AC). Dans le cas d'aciers doux, des hétérogénéités transitoires ou stationnaires peuvent se produire. C'est le cas de l'exemple présenté dans la figure 2.5a illustrant le phénomène des bandes de Lüders. Dans un premier temps, une bande de localisation de la déformation plastique se forme. Ce phénomène se manifeste par un crochet (point A) lors de l'essai. La bande se propage ensuite le long du fût de l'éprouvette (palier AB). la figure 2.5a montre que lorsque la déformation redevient homogène, on observe un durcissement du matériau appelé *écrouissage* (trajet BC). Lors de cette phase, on note l'existence d'une déformation résiduelle *plastique*  $\epsilon^{pl}$  lorsque la contrainte exercée est diminuée (B'O'). Si une charge est à nouveau appliquée (O'B') après cette décharge, le comportement est linéaire jusqu'au point (B') où a été effectuée la décharge. Le point (B') correspond alors à la nouvelle limite d'élas-

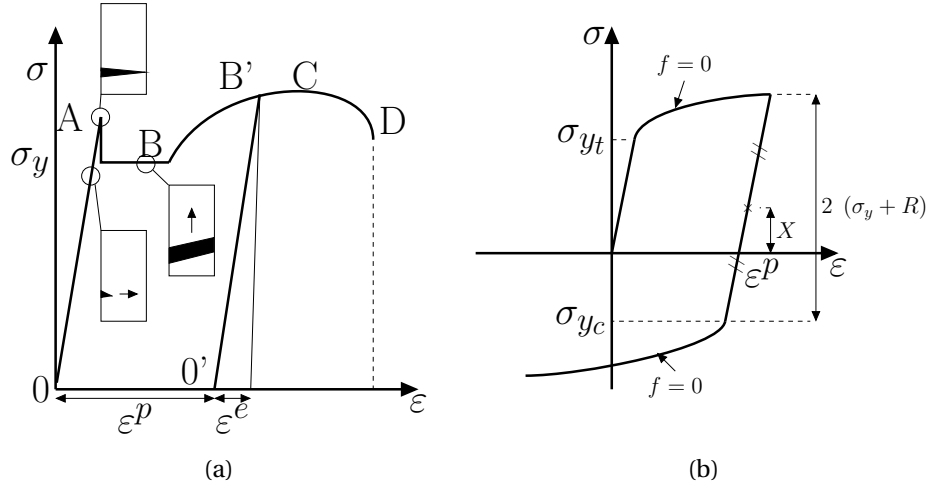


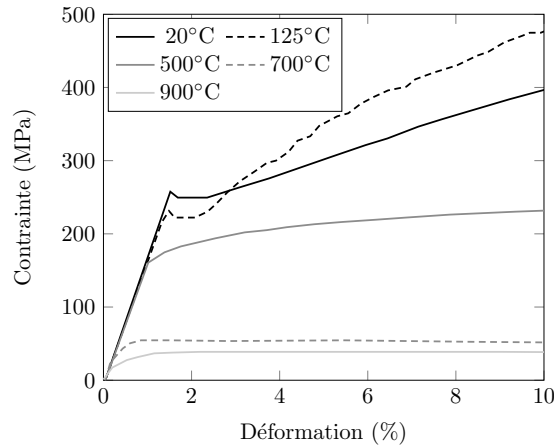
FIGURE 2.5: Écrouissage : acier doux (a), acier inox avec cyclage (b) [Lemaitre *et al.*, 2009a]

té qui a augmenté. Enfin, une phase de striction est visible sur la figure 2.5a (CD) précédant la ruine du matériau en (D).

Ces observations entraînent quatre conséquences pour la modélisation : il est nécessaire de scinder les déformations en une contribution élastique et une contribution permanente :  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^{pl} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}$  (i). Une loi élastique (linéaire pour l'acier) doit être définie :  $\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{E} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e$  (ii). Il faut introduire un critère d'évolution de la plasticité qui s'exprime à travers la loi d'écoulement plastique :  $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{pl} = 0$  si  $(\sigma < \sigma_{vMIS}^{eq} \text{ ou } f < 0)$  et  $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{pl} \geq 0$  si  $(\sigma = \sigma_{vMIS}^{eq} \text{ ou } f = 0)$ .  $f$  est la fonction critère (iii). Enfin, l'introduction d'une loi d'écrouissage définit l'évolution de la limite d'élasticité (iv). [Lemaitre *et al.*, 2009a] rappellent qu'en cas de sollicitations cycliques, deux mécanismes contribuant à l'écrouissage sont observables (figure 2.5b). Le premier mécanisme consiste en une translation du domaine d'élasticité : après une sollicitation en traction  $\sigma_y^{tr}$ , la limite d'élasticité en compression  $\sigma_y^{cp}$  est réduite. On parle d'écrouissage cinématique associé à  $X$ . Le second mouvement correspond à l'élargissement du domaine d'élasticité. Cet effet est dénommé *écrouissage isotrope* dont on note  $R$  la variable associée. Conformément aux sollicitations présentées par la figure 1.5, aucun cyclage thermique ne sera réalisé, si bien que nous ne tiendrons compte dans la suite que de l'écrouissage isotrope  $R$ . Pour de l'acier, on introduit un critère de von Mises tel que  $f(\underline{\underline{\sigma}}, R) = \sigma_{vMIS}^{eq} - R \leq 0$ . Où  $\sigma_{vMIS}^{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} (\underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\sigma}}')}$  est la contrainte équivalente au sens de von Mises,  $\underline{\underline{\sigma}}' = (\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_H \underline{\underline{1}})$  le déviateur des contraintes et  $\sigma_H = \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}$  la partie hydrostatique du tenseur des contraintes. La règle de normalité fournit alors l'évolution de la déformation plastique  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{pl} = \dot{\lambda}^{pl} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2} \dot{\lambda}^{pl} \frac{\underline{\underline{\sigma}}'}{\sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\sigma}}'}}$  avec  $\dot{\lambda}^{pl}$  le multiplicateur plastique défini par  $\sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{pl} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{pl}}$ .

### 2.1.2 Évolution des propriétés de l'acier avec la température

**Propriétés mécaniques :** En présence de températures élevées, les chercheurs [Holmes *et al.*, 1982, Cooke, 1988, Kankanamge et Mahendran, 2011] ont observé une dégradation des propriétés mécaniques, en particulier de la résistance et de la raideur de l'acier.



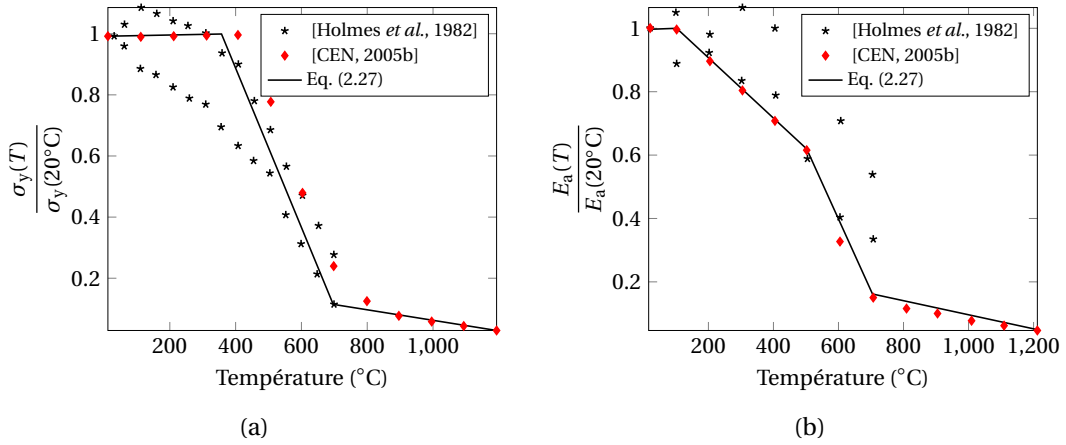
**FIGURE 2.6:** Courbes ( $\sigma$ - $\varepsilon$ ) d'un acier 43A à températures élevées [Cooke, 1988]

Pour des températures n'excédant pas 400°C, [Thor, 1973] ne constate pas de fluage du matériau chauffé. Ce dernier phénomène ne sera donc pas représenté dans nos simulations. Pour des produits laminés à chaud portés à plus de 150°C, [Cooke, 1988] relève une perte de raideur du matériau. Cette dernière se manifeste par une diminution de la résistance tandis que la déformation augmente à un niveau de contrainte donné (figure 2.6). Cette observation traduit une baisse du module d'Young du matériau avec la température. Pour des températures élevées, la limite d'élasticité est délicate à identifier suite à l'absence de palier. On lui substitue la contrainte correspondant à un allongement de 0.2%. [Willam *et al.*, 2009] remarquent que la résistance ultime de l'acier présente un accroissement surprenant pour des températures inférieures à 300°C. [Kankanamge et Mahendran, 2011] proposent une explication à ce phénomène. Pour ces derniers auteurs, cet accroissement concerne les classes d'aciers à résistance peu élevée. En présence de températures modérées, des transformations se produiraient au sein de la microstructure dont les effets domineraient le comportement ultime. Avec l'augmentation de la température, ces effets seraient retardés et la baisse de la résistance piloterait le comportement global. À partir des données stipulées par [CEN, 2005b], les auteurs [Willam *et al.*, 2009] proposent les équations (2.16a) et (2.16b) que nous utiliserons dans nos simulations.

$$\frac{\sigma_y(T)}{\sigma_y(20^\circ\text{C})} = \begin{cases} 1 & \text{si } T \in [0, 350^\circ\text{C}] \\ 1.885 - 2.528 \cdot 10^{-3} T & \text{si } T \in [350, 706^\circ\text{C}] \\ 0.243 - 2.025 \cdot 10^{-4} T & \text{si } T \in [706, 1200^\circ\text{C}] \end{cases} \quad (2.16a)$$

$$\frac{E_a(T)}{E_a(20^\circ\text{C})} = \begin{cases} 1 & \text{si } T \in [0, 100^\circ\text{C}] \\ 1.1 - 0.001 T & \text{si } T \in [100, 500^\circ\text{C}] \\ 1.775 - 2.35 \cdot 10^{-3} T & \text{si } T \in [500, 700^\circ\text{C}] \\ 0.312 - 2.6 \cdot 10^{-4} T & \text{si } T \in [700, 1200^\circ\text{C}] \end{cases} \quad (2.16b)$$

Dans la gamme de températures spécifiques aux accidents de dimensionnement des CNPE ou des INB  $[0, 200^\circ\text{C}]$ , l'EN 1993 et l'équation (2.16a) proposent de considérer  $\sigma_y(T) = \sigma_y(20^\circ\text{C})$ . Le module d'Young diminue légèrement dans le même intervalle de température. La formule (2.16b) surévalue la perte de raideur par rapport aux essais (figure 2.7b) ce qui est conservatif (au sens de la sécurité).



**FIGURE 2.7:** Température vs  $\frac{\sigma_y(T)}{\sigma_y(20^\circ\text{C})}$  (a),  $\frac{E_a(T)}{E_a(20^\circ\text{C})}$  (b) [Willam *et al.*, 2009]

**Propriétés thermiques :** Sous hypothèse d'isotropie, trois grandeurs suffisent à caractériser les transferts thermiques conductifs au sein d'un matériau dont la masse volumique,  $\rho$ . La chaleur spécifique,  $C_p$  correspond à l'énergie nécessaire pour élever la température de l'élément d'un degré. La conductivité thermique,  $\lambda$ , représente enfin la capacité du matériau à conduire la chaleur. Ces grandeurs sont généralement combinées en une variable  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ , la diffusivité qui exprime la vitesse de propagation de l'onde thermique dans le matériau. Ces propriétés thermiques sont affectées par l'augmentation de la température. Il en sera tenu compte dans les modèles en se basant sur les recommandations de l'EN 1993-1-2 [CEN, 2005b]. Le guide conseille de considérer une masse volumique constante  $\rho_a = 7850 \text{ kg/m}^3$ . Les équations (2.17a), (2.17b) et (2.17c) donnent respectivement les évolutions de la dilatation thermique  $\varepsilon^{\text{th}}$ , de la chaleur spécifique  $C_{p_a}$  et du coefficient de conductivité thermique

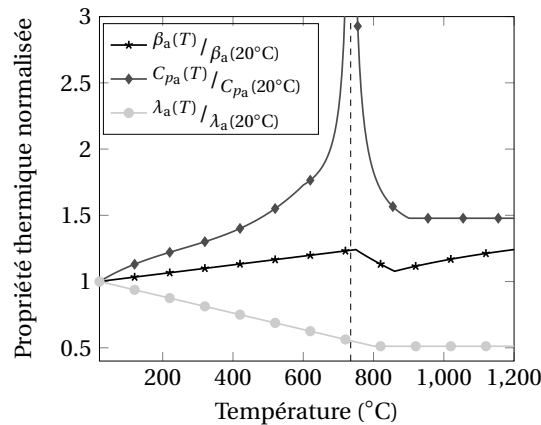
$\lambda_a$ .

$$\varepsilon^{\text{th}}(T) = \begin{cases} 1.2 \cdot 10^{-5} T + 0.4 \cdot 10^{-8} T^2 - 2.416 \cdot 10^{-4} & \text{si } T \in [20, 750^\circ\text{C}] \\ 1.1 \cdot 10^{-2} & \text{si } T \in [750, 860^\circ\text{C}] \\ 2 \cdot 10^{-5} T - 6.2 \cdot 10^{-3} & \text{si } T \in [860, 1200^\circ\text{C}] \end{cases} \quad (2.17a)$$

$$C_{p_a}(T) = \begin{cases} 425 + 7.73 \cdot 10^{-1} T - 1.69 \cdot 10^{-3} T^2 + 2.22 \cdot 10^{-6} T^3 & \text{si } T \in [20, 600^\circ\text{C}] \\ 666 + \frac{13002}{738 - T} & \text{si } T \in [600, 735^\circ\text{C}] \\ 545 + \frac{17820}{T - 731} & \text{si } T \in [735, 900^\circ\text{C}] \\ 650 & \text{si } T \in [900, 1200^\circ\text{C}] \end{cases} \quad (2.17b)$$

$$\lambda_a(T) = \begin{cases} 54 - 3.33 \cdot 10^{-2} T & \text{si } T \in [20, 800^\circ\text{C}] \\ 27.4 & \text{si } T \in [800, 1200^\circ\text{C}] \end{cases} \quad (2.17c)$$

L'influence de la température thermique sur le coefficient de dilatation de l'acier  $\beta_a$  est obtenue par la relation  $\beta_a = \frac{\varepsilon^{\text{th}}}{T - T_0}$  où  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . L'évolution des grandeurs normalisées sur leurs références à  $20^\circ\text{C}$  est tracée dans la figure 2.8. Les valeurs de références choisies sont  $\beta_a(20^\circ\text{C}) = 12 \cdot 10^{-6} \text{C}^{-1}$ ,  $C_{p_a}(20^\circ\text{C}) = 425 \text{J}/(\text{kgK})$  et  $\lambda_a(20^\circ\text{C}) = 54 \text{W}/(\text{mK})$ . Des modifications de la réponse des différentes grandeurs  $\beta$ ,  $C_p$  et  $\lambda$  se produisent autour de  $730^\circ\text{C}$ . Il existe notamment un pic de chaleur spécifique pour de telles températures. L'origine de ce phénomène se situe dans le changement de variété allotropique du fer. En dessous de  $730^\circ\text{C}$ , le fer se présente sous la forme d' $\alpha$ -cristaux de ferrite (structure cubique centrée) tandis qu'au dessus de  $730^\circ\text{C}$ , des  $\gamma$ -cristaux d'austénite (structure cubique faces centrées) se forment. La température à laquelle l'acier passe ainsi d'un état ferromagnétique à paramagnétique est nommée *Température de Curie*.



**FIGURE 2.8:** Propriétés thermiques de l'acier normalisées vs Température

Les propriétés mécaniques et thermiques de l'acier sont affectées et généralement dégradées par une augmentation de la température. Bien que le niveau de température en présence d'accident grave soit modéré ( $180^{\circ}\text{C}$ ), les variations du module d'Young  $E_a$ , de la conductivité thermique  $\lambda_a$  et de la chaleur spécifique  $C_{p_a}$  sont déjà importantes (10 à 20%) et doivent faire l'objet d'une attention particulière dans les simulations. Pour cela, les prescriptions de l'EN 1993-1-2 seront respectées dans la suite de ce travail.

## 2.2 Modélisation du béton jusqu'à $200^{\circ}\text{C}$

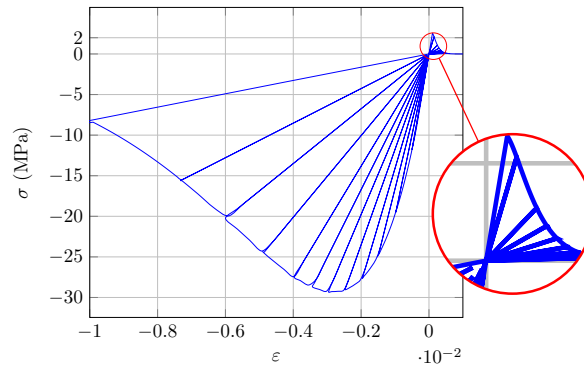
Le béton est un matériau biphasique dans lequel on distingue une matrice, pâte durcie issue du mélange d'eau et de ciment (i), et les granulats (ii). Chaque constituant contribue à un rôle bien spécifique dans la réponse globale du matériau. Les granulats, de dimensions variables, confèrent au matériau ses propriétés de résistance et en atténuent les variations volumiques (imputables au phénomène de retrait par exemple). Le ciment (25 à 40% du volume total) sert de liant. Lors de sa prise, le durcissement s'opère par la précipitation des constituants du ciment (silicates bicalcique  $\text{C}_2\text{S}$  et tricalcique  $\text{C}_3\text{S}$ ) en hydrates (silicate de calcium hydraté  $\text{CSH}$  et portlandite  $\text{Ca}(\text{OH})_2$ ) après réaction chimique avec l'eau. Le mécanisme d'hydratation, ainsi défini, s'accompagne de la formation de pores pouvant être ouverts et communiquer entre eux, ou fermés et constituer des vides isolés. La structure de ces pores aura une forte influence sur les propriétés de résistance mécanique du matériau. Avec l'élévation de la température dans le milieu, des incompatibilités entre les phases matricielles et granulaires apparaissent tandis que l'eau interstitielle contenue dans les pores change de phase et génère des pressions internes altérant la microstructure. Il en résulte des modifications des propriétés thermiques et mécaniques du matériau en fonction de la température appliquée au béton.

### 2.2.1 Comportement endommageable du béton

A température ambiante, plusieurs essais sont nécessaires pour appréhender la phénoménologie du béton afin de modéliser numériquement son comportement par la suite.

Les essais monotones de traction ( $\sigma > 0$ ) et de compression ( $\sigma < 0$ ) mettent en exergue le caractère fragile du matériau. Ainsi, le comportement à la compression se traduit par une première phase linéaire jusqu'à 75% de la résistance maximale (i). Des non-linéarités apparaissent ensuite et se développent jusqu'au pic (ii) suivies d'une phase adoucissante (iii). En présence de traction, le comportement exhibé est constitué d'une première phase linéaire suivie d'un régime adoucissant qui se distingue par sa brutalité et expose la fragilité du matériau à ce type de sollicitation [Terrien, 1980]. Un ordre de grandeur sépare les valeurs de résistance en traction et compression. L'apparition de non-linéarités correspondant à la dégradation du béton s'explique consensuellement par la formation de microfissures orientées normalement à l'extension [Mazars, 1986]. Le matériau présente un comportement anisotrope hétérogène et voit ses déformations se localiser au pic d'effort avant que la fissuration ne se propage lors de la phase adoucissante. Ces essais peuvent être réalisés en

présence de confinement. Dans ce cas, l'augmentation de la surface de contact au sein de la microstructure est à l'origine d'une raideur et d'une ductilité accrues au niveau macroscopique.



**FIGURE 2.9:** Courbe  $\sigma$ - $\varepsilon$  du modèle de Mazars obtenue ici avec Code\_Aster

En complément des essais monotones, il est coutume de procéder à des essais cycliques (alternés ou non). Lors des cycles chargement/déchargement, on observe l'apparition d'hystérèses et de déformations résiduelles [Reinhardt et Cornelissen, 1984]. Leurs origines trouvent une explication dans les frottements qui se produisent entre les lèvres des microfissures. En cas de décharge ces dernières ne se referment que partiellement confortant le caractère irréversible de la dégradation du matériau [Ramtani, 1990]. Pour finir les cycles de chargement illustrent la diminution des propriétés élastiques du béton. Ce constat associé à la notion de microfissuration est à la base des hypothèses de la mécanique de l'endommagement. Les modèles numériques développés à partir de cette théorie proposent d'introduire une variable  $D$  nommée *endommagement* [Lemaitre *et al.*, 2009b]. Cette variable s'interprète comme une densité de fissures et de défauts au sein d'un volume élémentaire représentatif telle que  $0 \leq D \leq 1$ , avec  $D = 0$  pour un béton sain. Le module d'élasticité injecté dans les modèles numériques est alors pondéré de l'endommagement à travers la relation  $(1 - D) E$  pour tenir compte numériquement (figure 2.9) de la dégradation observée expérimentalement. Pour finir, alterner sollicitations de traction avec compression expose le *caractère unilatéral* du béton. Il s'agit du phénomène de restauration de la raideur en compression suite à la fermeture des fissures de traction. Il apparaît alors naturel dans les modèles numériques de distinguer une variable d'endommagement en traction  $D^{\text{tr}}$  et en compression  $D^{\text{cp}}$  et de décomposer le tenseur des déformations en sa partie positive pour la contribution de traction et négative pour la compression [Mazars *et al.*, 1990, Ramtani *et al.*, 1992].

À partir d'une étude comparative des lois béton implémentées dans Code\_Aster (Annexe B), nous avons décidé d'utiliser la loi de Mazars. Basée sur la mécanique de l'endommagement, elle permet de tenir compte de la perte de raideur du béton sous l'effet de la microfissuration à travers une variable d'endommagement scalaire. Ce modèle isotrope ne tient pas compte du caractère unilatéral du béton, ni des déformations résiduelles ou des effets visqueux. Ces hypothèses ne s'avèrent pas préjudiciables aux modélisations compte tenu du caractère monotone des chargements thermiques considérés (figure 1.5). A partir



du potentiel en énergie libre de Helmholtz  $\rho \psi = \frac{1}{2}(1-D) \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\mathbb{E}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ , les lois d'état donnent l'expression du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = (1-D) \underline{\underline{\mathbb{E}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$  et de la force motrice de l'endommagement  $Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = -\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\mathbb{E}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ . [Mazars, 1986] introduit une fonction critère caractérisant l'évolution de l'endommagement écrite en déformations telle que  $f^d = \varepsilon_{\text{Maz}}^{\text{eq}} - \varepsilon_{d_0}$ . Où  $\varepsilon_{d_0}$  est une donnée matériau et  $\varepsilon_{\text{Maz}}^{\text{eq}}$  la déformation équivalente de Mazars déterminée à partir de la somme des carrés des parties positives des déformations principales :  $\varepsilon_{\text{Maz}}^{\text{eq}} = \sqrt{\sum_I \langle \varepsilon_I \rangle_+^2}$ . Enfin, la loi d'évolution de la variable D pour ce modèle ne dérive pas des règles de normalité associées aux conditions de cohérence, mais est formulée analytiquement :

$$D = (\alpha^{\text{tr}})^{\beta} D^{\text{tr}} + (1 - \alpha^{\text{tr}})^{\beta} D^{\text{cp}} \quad (2.18)$$

Le coefficient  $\alpha^{\text{tr}}$  permet de réaliser le couplage entre l'endommagement de traction et l'endommagement de compression. Il est borné entre 0 (absence de traction) et 1 (absence de compression).  $\beta$  est un paramètre matériau qui permet lorsqu'il est supérieur à 1, d'améliorer la réponse en cisaillement. Enfin les expressions de  $D^{\text{cp}}$  et  $D^{\text{tr}}$  sont données par :

$$D^{\text{cp}} = 1 - \frac{\varepsilon_{d_0}(1 - a^{\text{cp}})}{\varepsilon_{\text{Maz}}^{\text{eq}}} - \frac{a^{\text{cp}}}{\exp[B^{\text{cp}}(\varepsilon_{\text{Maz}}^{\text{eq}} - \varepsilon_{d_0})]} \quad (2.19a)$$

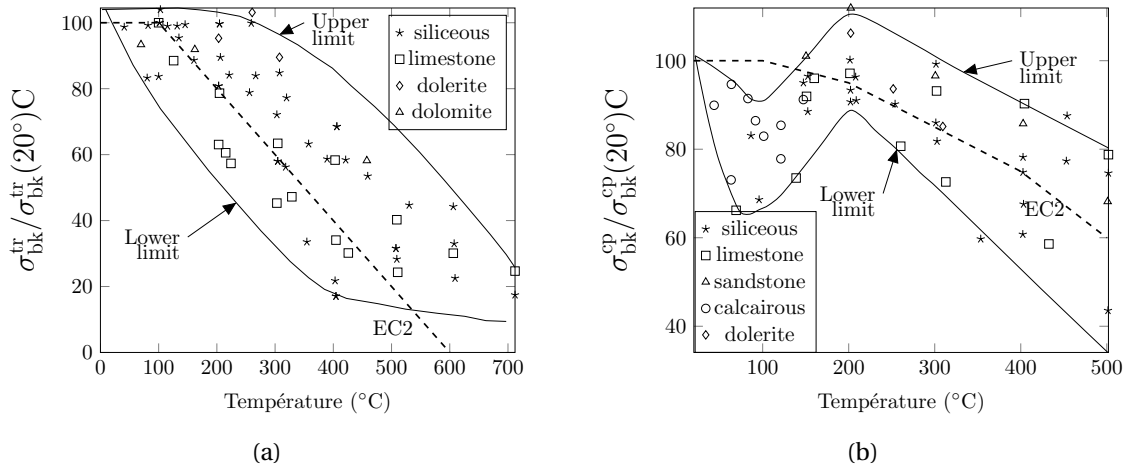
$$D^{\text{tr}} = 1 - \frac{\varepsilon_{d_0}(1 - a^{\text{tr}})}{\varepsilon_{\text{Maz}}^{\text{eq}}} - \frac{a^{\text{tr}}}{\exp[B^{\text{tr}}(\varepsilon_{\text{Maz}}^{\text{eq}} - \varepsilon_{d_0})]} \quad (2.19b)$$

### 2.2.2 Influence de la température sur les propriétés du béton

Nous avons rappelé en introduction à ce paragraphe la nature hétérogène du béton. A cause de la constitution très variable de ce matériau (nature des agrégats, granulométrie, teneur en eau...) les chercheurs qui souhaitent caractériser le comportement du béton aux hautes températures présentent des résultats dispersés dûs aux conditions d'essais différentes (formulations différentes, présence de chargement mécanique, sensibilité à la vitesse de chauffe, durée du maintien à chaud...) [Willam *et al.*, 2009]. Cependant, certaines tendances se dégagent de ces travaux, que nous reprendrons ici.

L'augmentation de la température engendre généralement une baisse des propriétés mécaniques du béton, notamment de sa raideur. [Castillo et Durrani, 1990] ont ainsi observé une réduction de 5 à 10% du module d'élasticité  $E_b$  entre 100 et 300°C. Dans ses travaux, [Schneider, 1976] rapporte une baisse du paramètre de 40% dès 200°C. La décomposition chimique du béton avec la température permet d'expliquer ce phénomène. En effet, entre 30 et 120°C, l'eau interstitielle présente au sein du matériau est évacuée par évaporation. Par la suite, entre 180°C et 300°C, les gels C-S-H se déshydratent et l'eau chimiquement liée se désorbe. Ces réactions chimiques s'accompagnent de pressions internes (d'autant plus importantes que le matériau est confiné) à l'origine de modifications de la porosité [Willam *et al.*, 2009]. Par ailleurs, les deux phases (matrice et granulats) présentes au sein du béton possèdent des propriétés thermiques différentes. Avec l'élévation de la température, les granulats

ont tendance à se dilater. Le comportement de la pâte ciment est variable se dilatant ou se contractant selon sa teneur en eau et le niveau de température du chargement thermique. Le couplage entre ces comportements différents engendre des déséquilibres en terme de déformation à l'origine d'une fissuration induite par la thermique. Ces dernières observations ont amené des chercheurs à proposer des modèles numériques de béton intégrant une variable d'endommagement thermique [Nechnech, 2000]. L'altération de la microstructure avec la



**FIGURE 2.10:** Température vs résistances normalisées : traction (a), compression (b) obtenues expérimentalement [Blundell *et al.*, 1976]

température permet également d'expliquer la baisse des propriétés de résistance du béton, à la fois en traction (figure 2.10a) et en compression (figure 2.10b). Lors des essais de compression, il a été rapporté à plusieurs reprises [Blundell *et al.*, 1976, Schneider, 1988] l'existence de trois régimes de comportement. Dans un premier temps, la résistance à la compression ( $\sigma_{bk}^{cp}$ ) diminue avec l'augmentation de la température [20, 90°C] (i). Ensuite,  $\sigma_{bk}^{cp}$  augmente entre 90 et 200°C, dépassant parfois la valeur à température ambiante ( $\sigma_{bk}^{cp}(20^\circ\text{C})$ ) (ii). Enfin,  $\sigma_{bk}^{cp}$  diminue à nouveau avec l'augmentation de la température (iii). Bien que le débat soit ouvert quant à l'origine de ce phénomène [Willam *et al.*, 2009], une théorie suggère que le séchage rapproche les particules de C-S-H les unes des autres suite à l'évacuation de l'eau. Les efforts de cohésion entre ces particules de type Van der Waals seraient alors renforcés ce qui se traduirait par une consolidation du matériau. Lorsque le comportement de la pâte de ciment n'est plus piloté par le séchage mais la dilatation thermique, les actions de cohésion sont réduites et la résistance à la compression diminue, baisse amplifiée par les transformations chimiques et minéralogiques à plus hautes températures. Enfin, le béton révèle un comportement plus ductile avec l'augmentation de la température. On observe que les recommandations de [CEN, 2004b] ne sont pas conservatives, notamment en compression (figure 2.10b). On procédera à l'identification des paramètres dans l'annexe B sur les résultats expérimentaux obtenus par [Schneider, 1976].

A l'instar des propriétés mécaniques, les transformations qui s'effectuent au sein de la

microstructure dues à une élévation de la température entraînent une évolution des propriétés thermiques. Ainsi, le rapport de [Naus, 2010] rappelle que des variations du poids et de la porosité auront une incidence sur la masse volumique. La conductivité thermique du béton,  $\lambda_b$ , est également fortement corrélée à la porosité et l'état de la microstructure du matériau. Une teneur en eau élevée dans la formulation du béton est à l'origine d'une porosité plus importante. Le coefficient de conductivité thermique diminue alors (en particulier lors du séchage) puisque d'avantage d'eau et d'air sont présents dans les pores. En effet, ces fluides sont des isolants thermiques qui s'opposent aux transferts conductifs (table 2.1). Une élévation de la température au sein du milieu a pour conséquence d'accroître les discontinuités tout en asséchant le matériau. Il en résulte une baisse de la conductivité thermique du béton. Enfin, la chaleur spécifique du béton tend à augmenter avec la température.

**TABLE 2.1:**  $\lambda$ , à température ambiante des constituants du béton [Naus, 2010]

Matériau	$\lambda$ (W/(mK))
Aggrégats	: 0.7-4.2
Béton saturé en eau	: 1-3.6
Pâte de ciment durcie, saturée en eau	: 1.1-1.6
Eau	: 0.515
Air	: 0.026
Vapeur saturée	: 0.037

Le paramètre est particulièrement sensible aux nombreuses transformations siégeant dans le béton [Naus, 2010]. Pour cette raison, un pic de chaleur spécifique, d'amplitude fonction de la teneur en eau, se manifeste entre 100 et 120°C lors de l'évaporation de l'eau libre<sup>2</sup>. L'EN 1992-1-2 tient compte des différents phénomènes que nous venons de présenter dans son approche réglementaire. Les équations (2.20a), (2.20b), (2.20c) et (2.20d) donnent respectivement les évolutions de la dilatation thermique  $\varepsilon^{\text{th}}$ , de la chaleur spécifique<sup>3</sup>  $C_{pb}$ , de la masse volumique  $\rho_b$  et du coefficient de conductivité thermique  $\lambda_b$ .

$$\varepsilon^{\text{th}}(T) = \begin{cases} -1.8 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-6} T + 2.3 \cdot 10^{-11} T^3 & \text{si } T \in [20, 700^\circ\text{C}] \\ 14 \cdot 10^{-3} & \text{si } T \in [700, 1200^\circ\text{C}] \end{cases} \quad (2.20a)$$

$$C_{pb}(T) = \begin{cases} 900 & \text{si } T \in [20, 100^\circ\text{C}] \\ 900 + (T - 100) & \text{si } T \in [100, 200^\circ\text{C}] \\ 1000 + (T - 200)/2 & \text{si } T \in [200, 400^\circ\text{C}] \\ 1100 & \text{si } T \in [400, 1200^\circ\text{C}] \end{cases} \quad (2.20b)$$

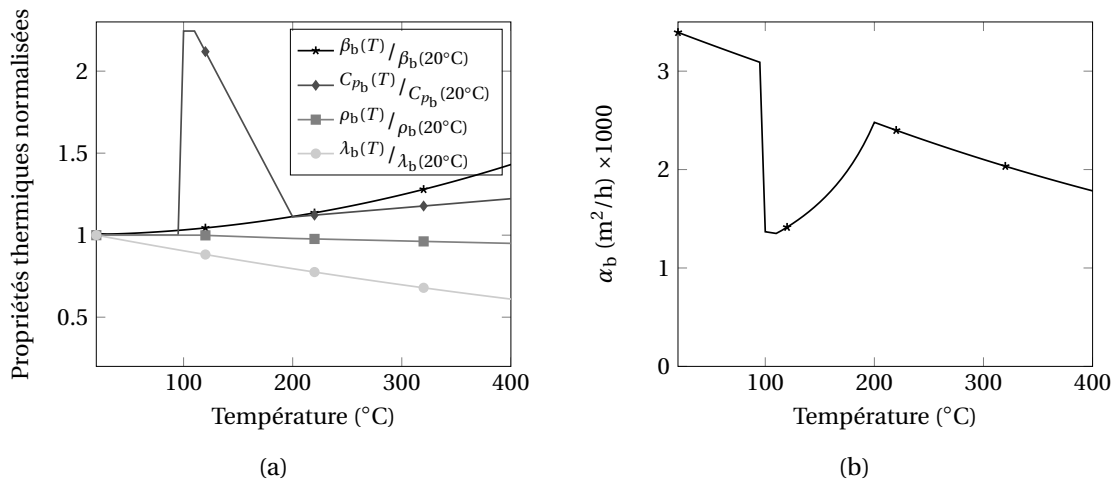
2. la chaleur spécifique inclue alors la chaleur latente d'évaporation de l'eau

3. Selon l'EN 1992-1-2 le pic de chaleur spécifique peut être pris égal à  $c_{peak} = 2020\text{J}/(\text{kgK})$  entre 100 et 110°C pour une teneur en eau de 3%.

$$\rho_b(T) = \begin{cases} \rho_b(20^\circ\text{C}) & \text{si } T \in [20, 115^\circ\text{C}] \\ \rho_b(20^\circ\text{C}) (1 - 0.02 (T - 115)/85) & \text{si } T \in [115, 200^\circ\text{C}] \\ \rho_b(20^\circ\text{C}) (0.98 - 0.03 (T - 200)/200) & \text{si } T \in [200, 400^\circ\text{C}] \\ \rho_b(20^\circ\text{C}) (0.95 - 0.07 (T - 400)/800) & \text{si } T \in [400, 1200^\circ\text{C}] \end{cases} \quad (2.20c)$$

$$\lambda_b(T) = 2 - 0.2451 (T/100) + 0.0107 (T/100)^2 \quad (2.20d)$$

L'influence de la température sur le coefficient de dilatation du béton  $\beta_b$  est obtenue par la relation  $\beta_b = \frac{\epsilon^{\text{th}}}{T - T_0}$  où  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . L'évolution des grandeurs normalisées sur leurs références à  $20^\circ\text{C}$  est tracée dans la figure 2.11. Les valeurs de références choisies sont  $\beta_b(20^\circ\text{C}) = 9 \cdot 10^{-6} \text{C}^{-1}$ ,  $C_{pb}(20^\circ\text{C}) = 900 \text{J}/(\text{kgK})$ ,  $\rho_b(20^\circ\text{C}) = 2300 \text{kg}/\text{m}^3$  et  $\lambda_b(20^\circ\text{C}) = 1.9 \text{W}/(\text{mK})$ .



**FIGURE 2.11:** Température vs propriétés thermiques du béton normalisées (a), diffusivité (b) selon EN 1992-1-2

À l'image de l'acier, les propriétés mécaniques et thermiques du béton sont affectées et généralement dégradées par une augmentation de la température. Bien que la température atteinte en cas d'accident grave soit modérée ( $180^\circ\text{C}$ ), les variations du module d'Young  $E_b$ , de la conductivité thermique  $\lambda_b$  et de la chaleur spécifique  $C_{pb}$  sont déjà importantes et doivent faire l'objet d'une attention particulière dans les simulations. Toutefois, compte tenu de la complexité du matériau due à son hétérogénéité et à sa composition variable, la littérature fournit des résultats très variables quant à la valeur des différents paramètres en fonction de la température. Cela étant stipulé, nous nous baserons sur les prescriptions de l'EN 1992-1-2 dans la suite de ce travail.

## 2.3 Comportement aux interfaces

Le dernier composant dont il faut définir le comportement afin d'alimenter le modèle numérique correspond aux interfaces. Dans la suite nous distinguerons deux types d'interfaces : la zone de contact plan plaque en acier - béton, **IPB**, et la transition entre connecteurs en acier (goujon et tirant) et béton, **ICB**. La gestion des interfaces doit être abordée avec soin car elles sont le lieu des transferts de contraintes et des transferts thermiques ; des transformations à l'interface entraîneront des modifications au niveau des transferts, en particulier en cas de décohésion de l'IPB lorsque le voilement local se produit.

### 2.3.1 Représentation mécanique des interfaces

**Phénoménologie :** Un parallèle peut être réalisé entre l'interface IPB et le phénomène d'adhésion se produisant lors de l'utilisation de coffrages métalliques. Les travaux de thèse de [Martin, 2007] rapportent que trois facteurs contribuent au développement d'une adhérence acier béton dans le cas de contact plan. Le premier correspond à une contribution mécanique dépendant de l'aspect surfacique de la peau métallique. Ainsi, en présence d'aspérités, la formation d'incrustations participe au phénomène d'adhérence. Le second facteur provient de la migration de l'eau vers l'interface. Un mince filet se constitue entre la plaque en acier et le béton. Des forces de capillarité (forces de Laplace) se développent et renforcent la cohésion de l'ensemble. Enfin, certains auteurs [Al Khalaf et Page, 1979] ont relevé une sensibilité de la résistance au cisaillement à l'interface acier-mortier suite à la polarisation de l'alliage par différents potentiels électriques. Les liaisons entre les ions métalliques et du béton participeraient à l'adhérence par l'action de forces électriques.

Cependant l'effet du retrait se cumulant avec le durcissement du béton, une réduction de l'adhérence est attendue avec le séchage du béton. Ainsi, en construction mixte, des mortiers haute adhérence [Thomann, 2005] ou des résines époxy [Mays et Vardy, 1982] sont placés à l'interface pour renforcer la liaison.

**Essai de caractérisation :** Afin de vérifier la valeur de l'adhérence pour l'interface IPB nous menons un essai push-off (figure 2.12).

Le procédé expérimental de cet essai est décrit comme suit. L'éprouvette est constituée de trois blocs de béton de sections identiques  $200 \times 200\text{mm}$  et de deux plaques en acier de 6mm d'épaisseur, préalablement dégraissées avec de l'acétone. Les deux blocs de béton externes ont pour vocation de raidir les plaques en acier pour garantir la planéité de ces dernières au cours de l'essai. Un effort de compression est appliqué au bloc central jusqu'à la ruine de l'interface par cisaillement. L'essai est réalisé à 28 jours.

Au cours de l'essai, la rupture à l'interface fut observée dès le décoffrage de l'éprouvette, lors du retrait de la cale placée au fond du coffrage lors du coulage. La répétition du procédé menant à des observations similaires, il fut conclu que l'adhérence IPB en présence de béton sec était suffisamment faible pour être négligée.

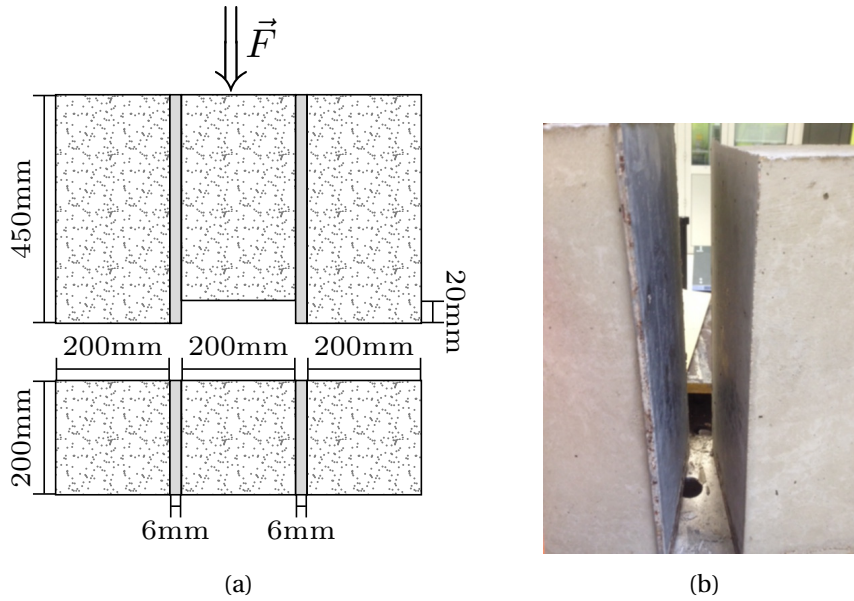


FIGURE 2.12: Essai de push-off, spécimen testé (a), rupture interface (b)

**Modélisation :** L'interface plaque-béton peut alors être représentée à l'aide d'algorithmes de contact. Toutefois les méthodes de recherches linéaires n'étant pas compatibles avec de tels algorithmes [Abbas, 2013], les difficultés de stabilité dues au comportement adoucissant du béton et au voilement se traduisent par des difficultés de convergence. Une solution consiste à introduire des éléments cohésifs. L'interface IPB est donc maillée explicitement à l'aide d'éléments joints, munis d'une loi de comportement représentative de la rupture fragile en mode I en traction et élastique en compression [Kazymyrenko, 2014]. Les expressions des contraintes normales et tangentielles sont données par (2.21).

$$\sigma_n = \begin{cases} P_{adh} K_n \delta_n & \text{si } \delta_n < 0 \\ \left[ \sigma_{adh} \frac{(1+P_r^{-1})}{\kappa} - \frac{K_n}{P_r} \right] \delta_n & \text{si } 0 \leq \delta_n < \kappa \\ \sigma_{adh} \frac{(1+P_r)}{\kappa} - \frac{K_n \delta_n}{P_r} & \text{si } \kappa \leq \delta_n < \kappa_r \\ 0 & \text{si } \delta_n \geq \kappa_r \end{cases} \quad \text{et} \quad \underline{\sigma}_t = \begin{cases} K_t \underline{\delta}^{tr} & \text{si } \delta_n < 0 \\ \left( 1 - \frac{\delta_n}{\kappa_r^{\tan}} \right) K_t \underline{\delta}^{tr} & \text{si } 0 \leq \delta_n < \kappa_r^{\tan} \\ 0 & \text{si } \delta_n \geq \kappa_r^{\tan} \end{cases} \quad (2.21)$$

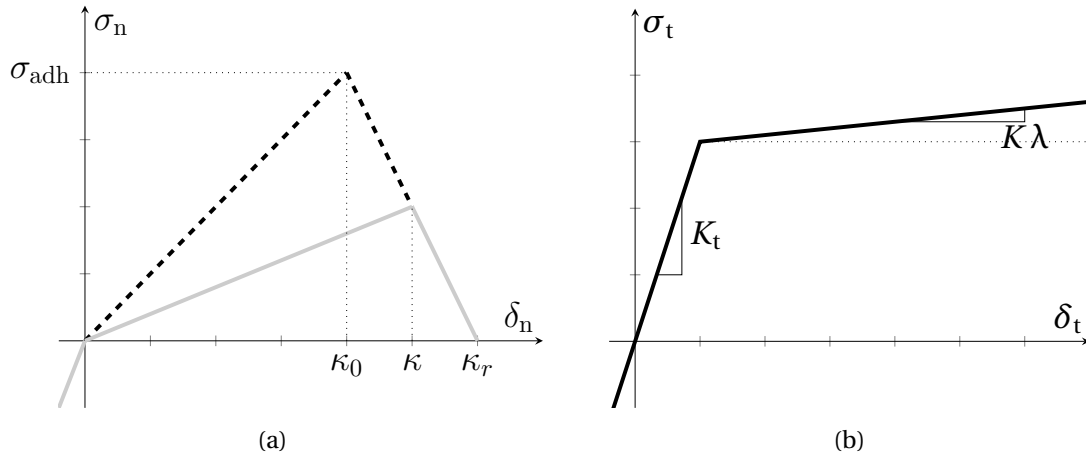
Avec  $\sigma_{adh}$  la contrainte d'adhérence,  $K_n$  la raideur normale,  $K_t$  la raideur tangente.  $\delta_{(n;t)}$  est le saut en déplacement (normal ou tangent).  $P_r$  est le coefficient de pénalisation de la rupture et  $P_{adh}$  celui de la pénalisation du contact. Soit  $\vartheta$  la rugosité de l'interface. Les seuils sont définis par  $\kappa_0 = \sigma_{adh} / K_n$  pour le domaine élastique,  $\kappa_r = \sigma_{adh} (1 + P_r) / K_n$  le seuil de rupture en saut de déplacement,  $\kappa_r^{\tan} = \kappa_r \tan(\vartheta \frac{\pi}{4})$  le seuil de rupture tangentielle.

Le comportement attendu de l'interface connecteur-béton (ICB) correspond à celui d'un rond lisse noyé dans le béton. Il comprend une première phase d'adhérence parfaite suivie d'une phase de dégradation des propriétés tribologiques et enfin d'une phase de glissement lorsque le connecteur glisse. Afin d'en tenir compte dans le modèle, des éléments de

joints formulés à partir d'une loi de frottement de Coulomb sont introduits dans le modèle [Kazymyrenko, 2014].

$$\begin{cases} \underline{\delta}_t = (\underline{\delta}_t)^e + (\underline{\delta}_t)^{pl} \\ \underline{\sigma}_t = K_t (\underline{\delta}_t)^e \\ \sigma_n = \min(K_n \delta_n, R_t) \end{cases} \quad \begin{cases} f(\underline{\sigma}, \lambda) = \|\underline{\sigma}_t\| + \mu (\sigma_n - R_t) - K \lambda \leq 0 \\ f \dot{\lambda} = 0; \dot{\lambda} \geq 0 \\ \dot{\underline{\delta}}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\underline{\sigma}_t}{\|\underline{\sigma}_t\|} \end{cases} \quad (2.22)$$

Avec  $R_t = \sigma_{adh} / \mu$  la résistance à la traction maximale,  $K_n$  la raideur normale,  $K_t$  la raideur tangente et  $K \lambda > 0$  un terme d'écroûissage.  $\mu$  est le coefficient de Coulomb tel que dans la phase de glissement,  $\|\underline{\sigma}_t\| = \mu \sigma_n$ .



**FIGURE 2.13:** Comportement Joint\_Rupture (a), Joint\_Frottant (b) [Kazymyrenko, 2014]

[Haddad *et al.*, 2008] s'est intéressé à l'influence de la température sur la dégradation de l'interface, à partir d'essai pull-out haute température. Il a observé une perte de la contrainte d'adhérence d'environ 40% à partir de 400°C, suivie d'une forte baisse. Pour des températures inférieures à 300°C,  $\sigma_{adh}$  est peu affectée pour des aciers HA. Dans le cas des ronds lisses, la perte d'adhérence est plus prononcée.

### 2.3.2 Échanges thermiques aux interfaces

Classiquement, les échanges thermiques à l'interface sont traités de façon continue dans les simulations. Dans la réalité, l'interface est discontinue : il existe un certain nombre de vides remplis d'eau, d'air ou de vapeur dont la faible conductivité thermique est à l'origine d'une résistance thermique d'interface qui doit être considérée dans la modélisation. [Yovanovich *et al.*, 1997] définit la conductance thermique à l'interface  $h_j^{th}$  comme la somme des contributions d'une conductance de contact  $h_c^{th}$  et d'une conductance  $h_{ipb}^{th}$  des vides. La conductance de contact [Cooper *et al.*, 1969] est une grandeur dépendant de la moyenne des conductivités thermiques des matériaux en contact, de la rugosité de ces matériaux, de

la pression de contact... La conductance des vides est fonction de la conductivité thermique du remplissage, de l'épaisseur des vides et d'un paramètre permettant de tenir compte de la raréfaction des gaz.  $h_j^{\text{th}}$  est donc une grandeur difficile à caractériser.

Dans ses travaux, [Ghojel, 2004] se focalise sur le cas particulier de l'interface acier-béton propre aux poteaux hybrides (IPB). En menant une analyse inverse à partir des résultats d'essais qu'il a réalisés, le chercheur propose la formule (2.23) permettant d'approcher la conductance pour ce type d'interface.

$$h_j^{\text{th}} = a - b \exp(-c T^d) \quad [\text{W}/(\text{m}^2\text{K})] \quad (2.23)$$

Où  $a = 1926$ ,  $b = 765.8$ ,  $c = 339.9$  et  $d = 1.4$  sont suggérés en absence de chargement. L'auteur observe une décroissance de  $h_j^{\text{th}}$  avec la température, marquée des  $200^\circ\text{C}$ . Elle serait due à la migration de l'eau vers l'interface avec la température puis à son évaporation, un mélange air/vapeur meilleur isolant thermique que l'eau remplissant alors les vides et diminuant  $h_{\text{ipb}}^{\text{th}}$ .

Cependant, le modèle de [Ghojel, 2004] ne tient pas compte du potentiel décollement et de l'introduction d'une lame d'air à l'interface. [Rush, 2013] propose un modèle de transferts unidimensionnels basé sur la conservation de l'énergie pour tenir compte de la décohésion éventuelle de l'IPB. Pour cela, il fait l'hypothèse de transferts conducto-convectifs au sein de la lame d'air.

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \nabla(\lambda \nabla T) + h_{\text{ipb}} [T - T_\infty] \quad (2.24)$$

Et introduit un terme de rayonnement émis par la plaque et reçu par le béton à l'interface :

$$\varphi_{a \rightarrow b} = \epsilon^{\text{tot}} \sigma_0 A (T_a^4 - T_b^4) \quad (2.25)$$

Où  $\epsilon^{\text{tot}} = \epsilon_a \epsilon_b$  est l'émissivité relative entre les surfaces d'acier et de béton de section équivalente  $A$ .  $\sigma_0 = 5.669 \cdot 10^{-8} \text{W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$ . Le terme de conductance  $h_{\text{ipb}}$  est corrélé à la conductivité de l'air, et l'épaisseur de la lame d'air par l'expression  $h_{\text{ipb}} = n \left( \frac{\lambda_{\text{air}}}{\delta} Nu_{\text{ipb}} \right)$ . Où  $n$  est un paramètre empirique et  $Nu_{\text{ipb}}$  le nombre de Nusselt dont l'expression est donnée par :

$$Nu_{\text{ipb}} = \begin{cases} 1 & \text{si : } Gr_w < 7 \cdot 10^3 \\ 0.0384 Gr_w^{0.37} & \text{si : } 10^4 < Gr_w < 8 \cdot 10^4 \\ 0.0317 Gr_w^{0.37} & \text{si : } Gr_w > 2 \cdot 10^5 \end{cases} \quad (2.26)$$

Dans (2.27),  $Gr_w = \frac{g \beta_{\text{air}} \rho_{\text{air}}^2 (T_a - T_b) \delta^3}{\mu_{\text{air}}^2}$  est le nombre de Grashof fonction de  $g$ , accélération due à la pesanteur,  $\beta_{\text{air}}$  coefficient de dilatation thermique de l'air.  $\rho_{\text{air}}$  et  $\mu_{\text{air}}$  sont respectivement la masse volumique et la viscosité de l'air. Pour des poteaux hybrides, [Rush, 2013] a observé lors d'essais que  $Gr_w < 7 \cdot 10^3$  et propose donc de prendre  $Nu_{\text{ipb}} = 1$ . Après discrétisation à l'aide des différences finies, la température dans le béton en présence d'une lame d'air s'écrit :



$$\begin{aligned}
T_{b_0}^i &= T_{b_0}^{i-1} \\
&+ \frac{\Delta \tau}{\rho_b C_{p_b} \Delta t_{b_0}} \left[ h_{ipb} \left( T_{a_n}^{i-1} - T_{b_0}^{i-1} \right) \right. \\
&+ \epsilon^{\text{tot}} \sigma_0 \left( (T_{a_n}^{i-1})^4 - (T_{b_0}^{i-1})^4 \right) \\
&\left. - \left( \frac{\lambda_{b_0}^{i-1} + \lambda_{b_1}^{i-1}}{2} \right) \left( \frac{T_{b_0}^{i-1} + T_{b_1}^{i-1}}{\Delta t_{b_0}} \right) \right]
\end{aligned}$$

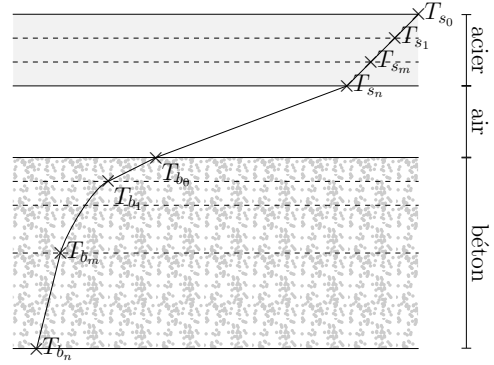


FIGURE 2.14: Transferts 1D

Dans la seconde partie du chapitre II, nous avons présenté les différentes phénoménologies que l'on souhaite modéliser et les lois de comportements numériques appropriées afin de les représenter dans les simulations. Les caractéristiques de chacun des matériaux présents (acier, béton, interfaces) sont affectées par la température. Or, l'évolution de ces propriétés et de la géométrie auront à leur tour une incidence sur la distribution des températures dans le système. Il est donc nécessaire d'introduire un couplage spatio-temporel des systèmes mécanique et thermique. Le choix du schéma de couplage ainsi que ses limites seront discutés dans la partie suivante.

### 3 Couplage thermo-mécanique

En cas de voilement de la plaque en acier, une lame d'air se forme à l'interface suite au déplacement hors plan de la peau métallique. La présence d'air introduit une résistance thermique venant modifier les transferts thermiques à l'interface et dont il est nécessaire de tenir compte dans le modèle [Ding et Wang, 2007]. Le gradient de température dans la structure dépend alors de la réponse post-critique de la plaque. Il en résulte un important couplage thermo-mécanique qui doit être traité avec soin [Piperno, 1997a].

Parmi les solutions numériques permettant de coupler les phénomènes thermiques et mécaniques, les schémas de couplage explicites offrent un compromis intéressant entre coût et précision. Cependant, compte-tenu de la nature du schéma, le phénomène thermique est en retard. Il en résulte une erreur fonction de l'incrément de temps utilisé.

Dans cette partie, nous développons un modèle analytique permettant d'obtenir une estimation *a priori* de l'erreur attendue.

#### 3.1 Écriture du problème couplé aux éléments finis

Nous reviendrons ici sur les différentes stratégies de couplage présentées dans la littérature et nous écrirons le problème couplé dans un formalisme adimensionnel cohérent avec la méthode des éléments finis.

### 3.1.1 Algorithmes de couplage

La question du couplage apparaît dès lors que la réponse globale de deux sous-structures interagissant ensemble nécessite, pour être calculée, la connaissance simultanée de chacune des solutions. La problématique est classique pour le traitement d'interactions dynamiques fluide-structure. Ces problèmes impliquent généralement deux sous-systèmes : l'un mécanique, l'autre fluide, couplés au moyen d'une interface dont le maillage est adaptatif [Batina, 1990]. Les méthodes de couplage spatio-temporel entre phénomènes physiques différents ont ainsi fait l'objet de nombreux travaux, en particulier dans le domaine de l'aéroélasticité [Farhat *et al.*, 1995, Farhat *et al.*, 1998].

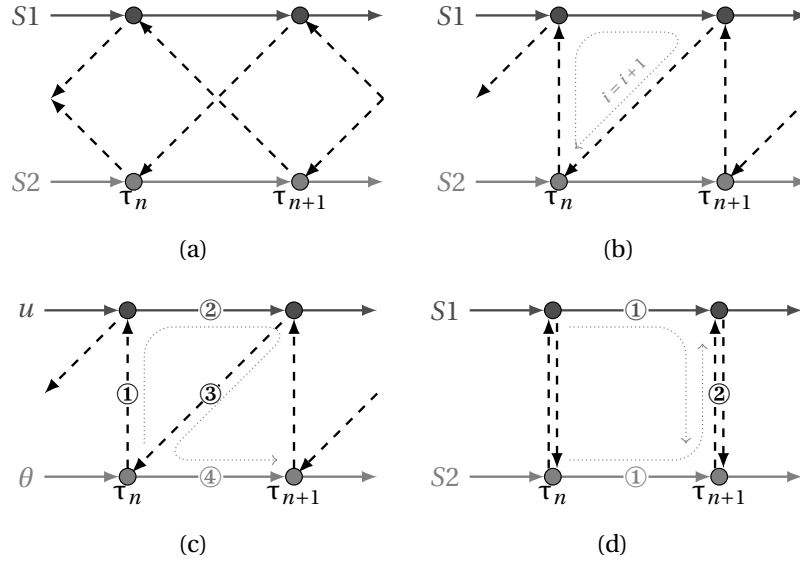
Deux approches différentes ont pu être proposées dans la littérature [Piperno, 1997b]. La première consiste à utiliser un schéma monolithique (fig 2.15a), aussi nommé schéma pleinement implicite. Il consiste en l'écriture des deux sous-systèmes comme un problème unique. La résolution du système est exacte, cependant ce type de schéma est difficile à exprimer et s'applique généralement aux études simples et linéaires.

En présence de fortes non-linéarités, les schémas décalés sont généralement employés [Piperno, 1997a]. Les deux sous-systèmes (**S1** et **S2**) s'écrivent séparément avec des conditions d'échanges à l'interface. Une attention particulière est accordée à la conservation de l'énergie au cours de la résolution numérique. Trois grandes familles d'algorithmes sont discernables :

- i. La procédure itérative : la solution est calculée pour S1 et S2 jusqu'à convergence. La solution est exacte mais la durée du calcul peut rapidement devenir prohibitive (fig 2.15b).
- ii. Les procédures de couplage décalées (**CSS**) : chaque sous-système est résolu successivement à chaque incrément temporel. L'utilisation de prédicteurs octroie un meilleur contrôle des données échangées, en particulier sur la génération artificielle d'énergie liée au couplage (fig 2.15c).
- iii. Les procédures de couplage parallèles : les deux sous-systèmes sont résolus simultanément. À l'image des schémas CSS, il est possible de garantir un meilleur respect de la conservation de l'énergie en contrôlant l'information échangée (fig 2.15d).

Pour les schémas décalés (fig 2.15c), le cycle est décrit comme suit : une prédiction du déplacement de la structure est réalisée au temps  $t_{n+1}$  :  $X^{n+1} = u^n + \alpha_0 \Delta\tau \dot{u}_n + \alpha_1 \Delta\tau (\dot{u}_n - \dot{u}_{n-1})$  [Piperno et Farhat, 2001] (1). Le système fluide est avancé à  $\tau_{n+1}$  en accord avec la prédiction faite (2). La pression et les contraintes exercées par le fluide sur la structure sont injectées dans le modèle mécanique (3). Le sous-système mécanique est enfin avancé à  $\tau_{n+1}$  avec les efforts calculés précédemment (4).

Dans notre modélisation du voilement thermique, un schéma décalé est utilisé pour son rapport intéressant entre précision (avec choix d'un prédicteur) et coût en ressources. nous choisissons de définir le sous-système S1 comme étant le problème mécanique et S2 le problème thermique.



**FIGURE 2.15:** Schémas de couplage monolithique (a), itératif (b), décalé (c) et parallèle (d) (adapté de [Moutoussamy, 2013])

### 3.1.2 Formulation variationnelle du problème couplé adimensionné

Il apparait alors nécessaire d'étudier les erreurs introduites par la violation du principe de conservation de l'énergie par le schéma de couplage. Pour cela, les équations couplées doivent être posées et analysées pour chaque sous-système [Ibrahimbegovic, 2006c]. Afin de borner le problème couplé, les équations caractéristiques seront écrites dans leur formalisme adimensionnel [Murphy, 1972].

Dans la suite,  $X$  représente la grandeur physique.  $X^*$  la référence choisie et  $\tilde{X}$  le facteur d'échelle. Ces grandeurs sont liées par la relation :

$$X = X^* \tilde{X} \quad (2.27)$$

**Équation de la chaleur adimensionnée :** L'équation classique de la chaleur pour les problèmes conductifs est donnée, pour un solide isotrope ( $\Omega$ ), par :

$$\rho C_p T_{,\tau} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \quad (2.28)$$

Soient  $R$  et  $Y$  les variables duales des variables d'états  $r$  (écrouissage isotrope) et  $D$  (endommagement) ; la source de chaleur produite par la dissipation mécanique :  $sv_{meca} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{,\tau}^{pl} - R r_{,\tau} + Y D_{,\tau}$  est négligée par rapport aux chargements externes appliqués. Introduire une température sans dimension  $\tilde{\theta} = \frac{T-T_0}{T_c-T_0}$  comme paramètre et utiliser la relation (2.27)

amènent à la relation :

$$\tilde{\rho} \tilde{C}_p \tilde{\theta}_{,\tilde{\tau}} = \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\lambda} \tilde{\nabla} \tilde{\theta}) \frac{\tau^* \lambda^*}{\rho^* C_p^* L^{*2}} \quad (2.29)$$

l'équation (2.29) s'accompagne des conditions limites de Dirichlet et de Neumann appliquées respectivement à  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  frontières du volume  $\Omega$  telles que  $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subset \Gamma)$  et  $(\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset)$  (voir figure 2.16a).

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}|_{\Gamma_1} &= \tilde{\theta}_h, \text{ température imposée} \\ -\tilde{\nabla} \tilde{\theta}|_{\partial\Gamma_2} \cdot \underline{n} &= \frac{h^* L^*}{\lambda^*} \tilde{h} (\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_\infty), \text{ échanges convectifs avec le milieu extérieur.} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Soit  $\hat{\theta}$  la température virtuelle. La formulation variationnelle de (2.29) s'écrit :

$$\int_{\tilde{\Omega}} \hat{\theta} \tilde{\rho} \tilde{C}_p \tilde{\theta}_{,\tilde{\tau}} d\tilde{\Omega} = - \frac{\tau^* \lambda^*}{\rho^* C_p^* L^{*2}} \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\nabla} \hat{\theta} \cdot \tilde{\lambda} \tilde{\nabla} \tilde{\theta} d\tilde{\Omega} + \frac{L^* h^*}{\lambda^*} \int_{\tilde{\Gamma}_2} \hat{\theta} \tilde{h} (\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_\infty) d\tilde{\Gamma} \quad (2.31)$$

On définit les fonctions de forme  $N_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  et l'approximation nodale de la température par :

$T|_{\Omega^{\text{el}}} = \sum_{i=1}^{N_{\Omega^{\text{el}}}^{\text{no}}} N_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) T_i$  Il vient dans le cadre des variables sans dimension :

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}|_{\Omega^{\text{el}}} &= \sum_{i=1}^{N_{\Omega^{\text{el}}}^{\text{no}}} N_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \tilde{\theta}_i \\ \tilde{\theta}_{,\tilde{\tau}}|_{\Omega^{\text{el}}} &= \sum_{i=1}^{N_{\Omega^{\text{el}}}^{\text{no}}} N_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \tilde{\theta}_{i,\tilde{\tau}} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Pour finir, l'expression de la matrice d'interpolation est donnée par :  $\underline{b}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \tilde{x} \\ \partial N_i / \partial \tilde{y} \\ \partial N_i / \partial \tilde{z} \end{bmatrix}$  (2.31)

devient :

$$\int_{\tilde{\Omega}^{\text{el}}} N_i \tilde{\rho} \tilde{C}_p N_j \tilde{\theta}_{j,\tilde{\tau}} d\tilde{\Omega} + \frac{\tau^* \lambda^*}{\rho^* C_p^* L^{*2}} \int_{\tilde{\Omega}^{\text{el}}} \underline{b}_i^t \cdot \tilde{\lambda} \underline{b}_j \tilde{\theta}_j d\tilde{\Omega} = \frac{L^* h^*}{\lambda^*} \int_{\tilde{\Gamma}_2^{\text{el}}} N_i \tilde{h} (N_j \tilde{\theta}_j - \tilde{\theta}_\infty) d\tilde{\Gamma} \quad (2.33)$$

Cette dernière équation peut s'écrire comme le système algébrique suivant traduisant l'équilibre thermique global, avec le vecteur des températures nodales  $\underline{\tilde{d}}^\theta = [\theta_1, \dots, \theta_{N^{\text{no}}}]^t$  :

$$\underline{\tilde{M}}^\theta \cdot \underline{\tilde{d}}_{,\tilde{\tau}}^\theta + \underline{\tilde{K}}^\theta \cdot \underline{\tilde{d}}^\theta = \underline{\tilde{f}}^\theta \quad (2.34)$$

Dont les coefficients sont données par :

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{ij}^\theta &= \int_{\tilde{\Omega}^{\text{el}}} N_i \tilde{\rho} \tilde{C}_p N_j d\tilde{\Omega} \\ \tilde{K}_{ij}^\theta &= \frac{\tau^* \lambda^*}{\rho^* C_p^* L^{*2}} \int_{\tilde{\Omega}^{\text{el}}} \underline{b}_i^t \cdot \tilde{\lambda} \underline{b}_j d\tilde{\Omega} - \frac{L^* h^*}{\lambda^*} \int_{\tilde{\Gamma}_2^{\text{el}}} N_i \tilde{h} N_j d\tilde{\Gamma} \\ \tilde{f}_i^\theta &= - \frac{L^* h^*}{\lambda^*} \int_{\tilde{\Gamma}_2^{\text{el}}} N_i \tilde{h} \tilde{\theta}_\infty d\tilde{\Gamma} \end{aligned} \quad (2.35)$$

**Équation d'équilibre adimensionnée :** Nous allons maintenant développer l'équation d'équilibre mécanique dans son formalisme adimensionnel. L'équation générale est donnée par l'expression :

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial \tau^2} = \underline{\nabla} \underline{\sigma} + \underline{b} \quad (2.36)$$

Les matériaux modélisés sont l'acier et le béton dont on prend en compte l'endommagement [Mazars, 1986]. Ces deux lois de comportement peuvent être formulées génériquement à travers un comportement élastique :  $\underline{\sigma} = \mathbb{A} : \underline{\varepsilon}^e$  où  $\mathbb{A}_s = \mathbb{E}_s$  pour l'acier et  $\mathbb{A}_c = (1-D) \mathbb{E}_c$  pour le béton.

La formulation variationnelle de (2.36) s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} \underline{\hat{u}} \rho \underline{u}_{,\tau\tau} d\Omega = - \int_{\Omega} \underline{\hat{\varepsilon}}^e : \mathbb{A} : \underline{\varepsilon}^e d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\hat{u}} \cdot \underline{b} d\Omega \quad (2.37)$$

Puis en adimensionnant l'équation (2.37) :  $\underline{\varepsilon}^e = \underline{\varepsilon} - \beta \Delta T \underline{1}$ ,  $\underline{\tilde{\varepsilon}} = \underline{\varepsilon}$ ,  $\beta = \beta^* \tilde{\beta}$ ,  $\mathbb{A} = A^* \tilde{\mathbb{A}}$  et  $\underline{u} = L^* \underline{\tilde{u}}$ , il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} \underline{\hat{\tilde{u}}} \tilde{\rho} \underline{\tilde{u}}_{,\tilde{\tau}\tilde{\tau}} d\tilde{\Omega} = & - \frac{\tau^{*2} A^*}{\rho^* L^{*2}} \int_{\tilde{\Omega}} \underline{\hat{\tilde{\varepsilon}}} : \tilde{\mathbb{A}} : \underline{\tilde{\varepsilon}} d\tilde{\Omega} + \frac{\tau^{*2} A^*}{\rho^* L^{*2}} \beta^* \Delta T_c \int_{\tilde{\Omega}} \underline{\hat{\tilde{\varepsilon}}} : \tilde{\mathbb{A}} : \tilde{\beta} \theta \underline{1} d\tilde{\Omega} \\ & + \frac{\tau^{*2} b^*}{\rho^* L^*} \int_{\tilde{\Omega}} \underline{\hat{\tilde{u}}} \cdot \underline{\tilde{b}} d\tilde{\Omega} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Soient les fonctions de forme  $N_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ , le déplacement nodal  $\underline{u}_{|\Omega^{el}} = \sum_{i=1}^{N_{no}^{\Omega^{el}}} N_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \underline{u}_i$  et  $\underline{B}_{\underline{i}}$  la matrice d'interpolation déformation-déplacement. Il vient :

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{u}}_{|\Omega^{el}} &= \sum_{i=1}^{N_{no}^{\Omega^{el}}} N_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \underline{\tilde{u}}_i \\ \underline{\tilde{u}}_{,\tilde{\tau}|\Omega^{el}} &= \sum_{i=1}^{N_{no}^{\Omega^{el}}} N_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \underline{\tilde{u}}_{,\tilde{\tau}i} \text{ Avec } \underline{B}_{\underline{i}} = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \tilde{x} & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial \tilde{y} & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial \tilde{z} \\ \partial N_i / \partial \tilde{x} & \partial N_i / \partial \tilde{y} & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial \tilde{y} & \partial N_i / \partial \tilde{z} \\ \partial N_i / \partial \tilde{x} & 0 & \partial N_i / \partial \tilde{z} \end{bmatrix} \\ \underline{\tilde{\varepsilon}}_{|\Omega^{el}} &= \sum_{i=1}^{N_{no}^{\Omega^{el}}} \underline{B}_{\underline{i}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \cdot \underline{\tilde{u}}_i \end{aligned}$$

En tenant compte des définitions précédentes, l'équation (2.38) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} N_i \tilde{\rho} N_j \underline{\tilde{u}}_{j,\tilde{\tau}\tilde{\tau}} d\tilde{\Omega} + \frac{\tau^{*2} A^*}{\rho^* L^{*2}} \int_{\tilde{\Omega}} \underline{B}_{\underline{i}}^t : \tilde{\mathbb{A}} : \underline{B}_{\underline{j}} \underline{\tilde{u}}_j d\tilde{\Omega} \\ - \frac{\tau^{*2} A^*}{\rho^* L^{*2}} \beta^* \Delta T_c \int_{\tilde{\Omega}} \underline{B}_{\underline{i}}^t : \tilde{\mathbb{A}} : N_j \underline{1} \tilde{\beta} \tilde{\theta} d\tilde{\Omega} = \frac{\tau^{*2} b^*}{\rho^* L^*} \int_{\tilde{\Omega}} N_i \cdot \underline{\tilde{b}} d\tilde{\Omega} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Cette dernière équation peut s'écrire comme le système algébrique suivant traduisant l'équilibre mécanique global, avec le vecteur des déplacement nodaux  $\underline{\tilde{d}}^u = [u_1, \dots, u_{N^{no}}]^t$  :

$$\underline{\tilde{M}}^u \cdot \underline{\tilde{d}}_{,\tilde{\tau}\tilde{\tau}}^u + \underline{\tilde{K}}^u \cdot \underline{\tilde{d}}^u - \underline{\tilde{F}}^\theta \cdot \underline{\tilde{d}}^\theta = \underline{\tilde{f}}^u \quad (2.40)$$

Dont les coefficients sont données par :

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{M}}_{ij}^u &= \int_{\tilde{\Omega}} N_i \tilde{\rho} N_j d\tilde{\Omega} \\ \underline{\tilde{K}}_{ij}^u &= \frac{\tau^{*2} A^*}{\rho^* L^{*2}} \int_{\tilde{\Omega}} \underline{\tilde{B}}_i^t : \tilde{\mathbb{A}} : \underline{\tilde{B}}_j d\tilde{\Omega} \\ \underline{\tilde{F}}_{ij}^\theta &= \frac{\tau^{*2} A^*}{\rho^* L^{*2}} \beta^* \Delta T_c \int_{\tilde{\Omega}} \underline{\tilde{B}}_i^t : \tilde{\mathbb{A}} : \tilde{\beta} N_j \underline{\mathbb{1}} d\tilde{\Omega} \\ \underline{\tilde{f}}_i^u &= \frac{\tau^{*2} b^*}{\rho^* L^*} \int_{\tilde{\Omega}} N_i \cdot \underline{\tilde{b}} d\tilde{\Omega} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Le système couplé est donné par les équations (2.34) et (2.40) et s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{\tilde{M}}^u \cdot \underline{\tilde{d}}_{,\tilde{\tau}\tilde{\tau}}^u + \underline{\tilde{K}}^u \cdot \underline{\tilde{d}}^u - \underline{\tilde{F}}^\theta \cdot \underline{\tilde{d}}^\theta = \underline{\tilde{f}}^u \\ \underline{\tilde{M}}^\theta \cdot \underline{\tilde{d}}_{,\tilde{\tau}}^\theta + \underline{\tilde{K}}^\theta \cdot \underline{\tilde{d}}^\theta = \underline{\tilde{f}}^\theta \end{cases} \quad (2.42)$$

L'effet de la température sur le système mécanique s'exprime par l'apparition d'un effort interne imputable à la dilatation thermique. L'influence de la réponse mécanique sur le sous-système thermique est moins évidente. En effet, ce phénomène se traduit par une modification de la géométrie et donc des volumes sur lesquels est calculé l'équilibre thermique.

L'utilisation d'un schéma décalé pour résoudre le problème (2.42) se traduit par l'apparition d'une erreur liée à la nature explicite du schéma de couplage. En effet la résolution décalée de chaque sous-système entraîne le retard de l'un par rapport à l'autre comme l'illustre la figure 2.15c. Compte tenu de la forte non-linéarité du modèle mécanique et de son caractère instable, nous avons décidé de propager l'erreur sur le problème thermique conductif. Ce sous-système étant plus régulier, il est possible de borner la température même en présence de flambement de la plaque en acier. Le système (2.42) peut alors être formulé à l'instant  $\tau_n$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} \underline{\tilde{M}}_n^u \cdot \underline{\tilde{d}}_{n,\tilde{\tau}\tilde{\tau}}^u + \underline{\tilde{K}}_n^u \cdot \underline{\tilde{d}}_n^u - \underline{\tilde{F}}_n^\theta \cdot \underline{\tilde{d}}_{n-1}^\theta = \underline{\tilde{f}}_n^u \\ \underline{\tilde{M}}_n^\theta \cdot \underline{\tilde{d}}_{n,\tilde{\tau}}^\theta + \underline{\tilde{K}}_n^\theta \cdot \underline{\tilde{d}}_n^\theta = \underline{\tilde{f}}_n^\theta \end{cases} \quad (2.43)$$

En accord avec les hypothèses effectuées, le retard sur le champ de température apparaît explicitement dans le système (2.43) par l'indice  $n-1$ . Le système est résolu de la façon suivante : à partir du champ de températures calculé à l'instant  $\tau_{n-1}$ , une prédiction [Piperno et Farhat, 2001] de l'état thermique au temps  $\tau_n$  est réalisée :  $\tilde{\theta}_n^{\text{pred}} = \tilde{\theta}_{n-1} + \alpha_0 \Delta \tilde{\tau} \tilde{\theta}_{n-1,\tilde{\tau}} + \alpha_1 \Delta \tilde{\tau} (\tilde{\theta}_{n-1,\tilde{\tau}} - \tilde{\theta}_{n-2,\tilde{\tau}})$ . Où  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sont des paramètres qui déterminent la précision du schéma<sup>4</sup> (i). Le champ de température  $\tilde{\theta}_n^{\text{pred}}$  est utilisé dans le calcul mécanique dont on

4.  $\alpha_0 = 1$  et  $\alpha_1 = 0$  pour un schéma du premier ordre,  $\alpha_0 = 1$  et  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$  pour un schéma du second ordre

recupère le champ de déplacement à l'instant  $\tau_n$  (ii). Le maillage thermique est actualisé par translation de l'incrément de déplacement précédemment calculé (iii). Le champ de température  $\tilde{\theta}_n$  est calculé dans cette nouvelle configuration (iv). On procède au contrôle de l'erreur  $\delta\tilde{\theta}_n = \tilde{\theta}_n - \tilde{\theta}_n^{\text{pred}}$  (v). On remarque que le prédicteur utilisé correspond à un développement en série de Taylor de  $\tilde{\theta}_n$  à l'ordre un ou deux. En prolongeant cette réflexion à un prédicteur d'ordre quelconque  $i$ , on constate que l'erreur de couplage définie précédemment  $\delta\tilde{\theta}_n^i = \tilde{\theta}_n - \tilde{\theta}_n^{\text{pred}(i)}$  correspond au reste du développement en série de Taylor :  $\delta\tilde{\theta}_n^i = R_i(\tilde{\tau}) = \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \tilde{\theta}_n}{\partial \tilde{\tau}^k} \Delta \tilde{\tau}^k$ . Il est alors possible d'obtenir un majorant de cette erreur à partir du théorème du reste pour les séries de Taylor.

**Théorème 1** Si  $\frac{\partial^{i+1} \tilde{\theta}_n}{\partial \tilde{\tau}^{i+1}}$  est continue sur l'intervalle  $\mathcal{I} = [\tau_n, \tau_n + \Delta\tau]$ , alors :  $\exists \tau_M \in \mathcal{I}$  tel que  $|R_i(\tilde{\tau})| \leq \left| \frac{\partial^{i+1} \tilde{\theta}(\tau_M)}{\partial \tilde{\tau}^{i+1}} \right| \frac{\Delta \tilde{\tau}^{i+1}}{(i+1)!}$

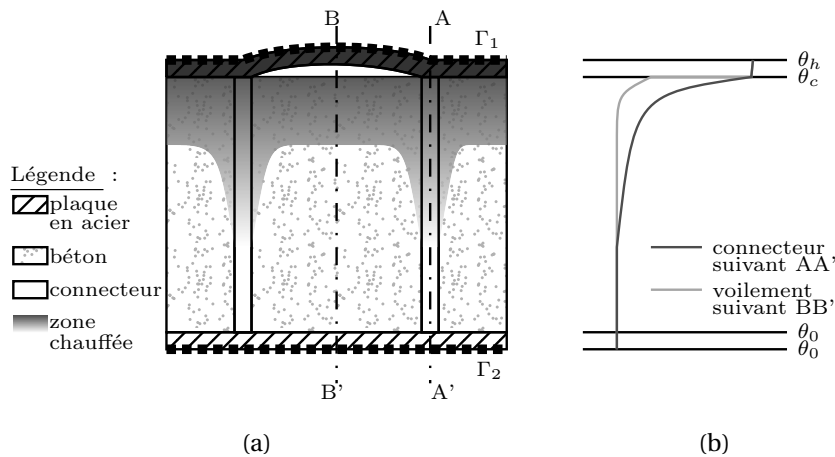
Dans le paragraphe suivant nous présentons une méthode pour obtenir une approximation analytique de la quantité  $\left| \frac{\partial^{k+1} \theta(\tau_M)}{\partial \tilde{\tau}^{k+1}} \right|$ .

### 3.2 Estimation analytique de la déviation sur la température

Pour cela nous nous baserons sur la solution du problème conductif en une dimension (1D) afin de simplifier le problème.

#### 3.2.1 Description du modèle simplifié

Le système considéré correspond à une structure SC avec ses deux plaques métalliques, un remplissage béton et des connecteurs traversants répartis en mailles régulières.



**FIGURE 2.16:** Description du système thermo-mécanique : géométrie (a), allure des gradients (b)

Le chargement considéré correspond au cas de l'accident grave en centrale (figure 1.5). Ce scénario de chargement se traduit par une vitesse de la montée en température de  $0.18^\circ\text{C/s}$ . Il faut donc  $\tau_{\text{ref}} = 6\text{s}$  pour que la température augmente d'un degré Celsius. Afin de caractériser la réponse de chaque composant de l'élément SC, la température caractéristique de conduction  $\tau_\lambda = \frac{t^2}{\alpha}$  est calculée pour les différentes épaisseurs  $t$  de matériaux. Avec les propriétés thermiques de l'acier, de l'air et du béton ainsi que leurs épaisseurs respectives :  $t_a = 4\text{mm}$ ,  $t_{\text{air}} = 5\text{mm}$  et  $t_b = 250\text{mm}$ , il vient  $\tau_{\lambda_a} \simeq 1\text{s}$ ,  $\tau_{\lambda_{\text{air}}} \simeq 0.9\text{s}$  et  $\tau_{\lambda_b} \gg \tau_{\text{ref}}$ . Le calcul des différents temps caractéristiques comparé à la vitesse du chargement appliqué permettent de réaliser les hypothèses suivantes : d'abord le régime est supposé permanent dans les plaques d'acier et dans la couche d'air puisque  $\tau_{\lambda_a} \approx \tau_{\lambda_{\text{air}}} < \tau_{\text{ref}}$  (i). Au contraire,  $\tau_{\lambda_b} \gg \tau_{\text{ref}}$ . On suppose donc un choc thermique au sein du béton exprimé en 1D par l'équation (2.44) (ii). Ce qui se traduit par un gradient de température non linéaire comme l'illustre la figure 2.16b.

$$\tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{\tau}) = (\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_c) \operatorname{erf} \left( \underbrace{\frac{L^*}{2 \sqrt{\alpha^* \tau^*}}}_{B^*} \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^{\text{eq}} \tilde{\tau}}} \right) + \tilde{\theta}_c \quad (2.44)$$

On introduit  $\alpha'$ , la diffusivité équivalente du système. En effet, les connecteurs seront refroidis par échanges transverses avec le béton environnant [Kodur et Mackinnon, 1999]. On propose alors de traiter cette zone particulière en introduisant une diffusivité équivalente dont la valeur est une somme pondérée des diffusivités de l'acier et du béton.  $\alpha^{\text{eq}} = \omega_a \alpha_a + (1 - \omega_a) \alpha_b$  où  $\omega_a$  est le poids de la participation de l'acier par rapport à celle du béton. Les températures en régime stationnaire pourront être déterminées à partir de l'expression des résistance thermiques :  $R_a^{\text{th}} = \frac{t_a}{\lambda_a}$ ,  $R_{\text{air}}^{\text{th}} = \frac{t_{\text{air}}}{\lambda_{\text{air}}}$ ,  $\frac{1}{R_{\text{tot}}^{\text{th}}} = \omega_a \frac{\lambda_a}{t_b} + (1 - \omega_a) \frac{\lambda_b}{t_b}$  (où  $\omega_a = 1$  représente un remplissage en acier pur et  $\omega_a = 0$  en béton pur) et enfin  $R_{\text{ext}}^{\text{th}} = \frac{1}{h_{\text{ext}}}$ .

### 3.2.2 Élaboration de la solution analytique

**Développement :** Afin d'obtenir une borne supérieure de  $|\frac{\partial^{k+1}\theta(\tau_M)}{\partial \tilde{\tau}^{k+1}}|$ , la solution que nous proposons consiste à développer (2.44) en série entière. Pour cela, on exploite la décomposition en série entière de la fonction erreur [Winitzki, 2003].

La température peut alors s'exprimer :

$$\tilde{\theta}_n(\tilde{x}, \tilde{\tau}) = \tilde{\theta}_c + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_c) \sum_0^\infty (-1)^k \underbrace{B^{*2k+1} \frac{1}{(2k+1) k!} \left( \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^{\text{eq}}}} \right)^{2k+1}}_{a_k} \left( \frac{1}{\sqrt{\tilde{\tau}_n}} \right)^{2k+1} \quad (2.45)$$

Le rayon de convergence de cette série est  $+\infty$ . La série est absolument convergente donc ses dérivées sont absolument convergentes de même rayon de convergence (voir annexe C section 1). En procédant par récurrence, le calcul de la dérivée de  $\tilde{\theta}$  relativement à  $\tilde{\tau}$  amène :



$$\frac{\partial^i \tilde{\theta}_n}{\partial \tilde{\tau}^i} \Big|_{\tilde{\tau}_n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_c) \sum_0^\infty (-1)^{k+i} a_k \tilde{\tau}_n^{-(k+i+\frac{1}{2})} \left( \prod_{j=0}^{i-1} \left( k + j + \frac{1}{2} \right) \right) \quad (2.46)$$

Cette dernière expression se simplifie en remarquant que  $\prod_{j=0}^{i-1} (k + j + \frac{1}{2}) = \frac{(2[k+i])! (k)!}{(k+i)! (2k)!} \frac{1}{2^i}$ . L'équation (2.46) peut être réécrite :

$$\frac{\partial^i \tilde{\theta}_n}{\partial \tilde{\tau}^i} \Big|_{\tilde{\tau}_n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_c) \sum_{k=0}^\infty (-1)^{k+i} b_k^{(i)} \tilde{\tau}_n^{-(k+i+\frac{1}{2})} \quad (2.47a)$$

$$b_k^{(i)} = \frac{1}{2^i} \frac{1}{(2k+1)} \frac{(2[k+i])!}{(k+i)! (2k)!} \left( \frac{L^*}{2 \sqrt{\alpha^* \tau^*}} \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^{\text{eq}}}} \right)^{2k+1} \quad (2.47b)$$

On peut décomposer cette dernière expression en deux termes. Le premier est l'approximation de la dérivée  $i$ -ième à l'ordre  $m$  notée  $Q_m$ . Le second terme est le reste à l'ordre  $m$  noté  $S_m$  dont une borne supérieure  $S_{\max}$  peut être déterminée à partir du théorème du reste pour les séries alternées. Ces deux grandeurs sont définies par les équations suivantes :

$$Q_m \left( \frac{\partial^{i+1} \tilde{\theta}_{n-1}}{\partial \tilde{\tau}^{i+1}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_c) \sum_{k=0}^m (-1)^{k+i+1} b_k^{(i+1)} \tilde{\tau}_{n-1}^{-(k+i+\frac{3}{2})} \quad (2.48a)$$

$$S_m \left( \frac{\partial^{i+1} \tilde{\theta}_{n-1}}{\partial \tilde{\tau}^{i+1}} \right) \leq S_{\max} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_c) b_{m+1}^{(i+1)} \tilde{\tau}_{n-1}^{-(m+i+\frac{5}{2})} \quad (2.48b)$$

L'écriture en série entière permet de calculer la somme  $Q_m$  récursivement pour obtenir une précision à des ordres  $m$  élevés et un reste  $S_m$  d'autant plus faible, à moindre coût (annexe C section 2). Finalement, l'erreur de couplage  $\delta \tilde{\theta}$  peut s'écrire en fonction de  $Q_m$  et  $S_{\max}$  :

$$\left| \delta \tilde{\theta}_n^i \right| \leq \delta \tilde{\theta}_n^{(i \ m)}(Q_m, S_{\max}, \Delta \tilde{\tau}) = \left( Q_m \left( \frac{\partial^{i+1} \tilde{\theta}_{n-1}}{\partial \tilde{\tau}^{i+1}} \right) + S_{\max} \right) \frac{\Delta \tilde{\tau}^{i+1}}{(i+1)!} \quad (2.49)$$

Où  $i$  est l'ordre du prédicteur utilisé dans le couplage,  $m$  est l'ordre d'approximation de la dérivée  $i$ -ème par rapport au temps de la température sous hypothèse de conduction thermique 1D. A partir de l'équation (2.49) et d'une tolérance imposée sur l'erreur, ( $\delta \tilde{\theta}$ ), il est possible d'obtenir un ordre de grandeur du pas de temps à respecter dans la simulation numérique.

$$\Delta \tilde{\tau} \leq \Delta \tilde{\tau}^{(i \ m)} = \sqrt[i+1]{\frac{\delta \tilde{\theta} (i+1)!}{\left( Q_m \left( \frac{\partial^{i+1} \tilde{\theta}_{n-1}}{\partial \tilde{\tau}^{i+1}} \right) + S_{\max} \right)}} \quad (2.50)$$

**Influence des différents paramètres sur l'erreur analytique :** À partir des formules obtenues précédemment il est possible d'obtenir une estimation de l'erreur de couplage pour un point défini par ses coordonnées spatiale et temporelle ( $x, \tau$ ). Afin d'étudier l'influence des approximations d'ordre  $i$  du prédicteur et d'ordre  $m$  de  $\frac{\partial^i \tilde{\theta}}{\partial \tilde{\tau}^i}$ , nous considérons

dans la suite un point situé dans la couche béton, après voilement de la plaque en acier. Les propriétés thermiques retenues pour le béton sont :  $\lambda_b = 1.90 \text{ W/(m K)}$ ,  $C_{pb} = 900 \text{ J/(kg K)}$ ,  $\rho_b = 2300 \text{ kg m}^{-3}$ . Les valeurs de référence choisies pour réaliser l'adimensionnement sont : la diffusivité de l'acier  $\alpha^* = \frac{\lambda^*}{C_p^* \rho^*} = \frac{\lambda_a}{C_{pa} \rho_a}$  et le temps caractéristique de conduction de la plaque en acier :  $\tau^* = \frac{t_p^2}{\alpha^*}$ . Concernant les propriétés thermiques de l'acier il vient  $\lambda_a = 54 \text{ W/(m K)}$ ,  $C_{pa} = 425 \text{ J/(kg K)}$  et  $\rho_a = 7850 \text{ kg m}^{-3}$ .

**TABLE 2.2:** Influence des paramètres  $x, \tau, i, m$  et  $\Delta\tau$  sur l'erreur de couplage prédite

		Cas	$C_{\text{ref}}$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
<b>Variables d'entrées</b>							
Profondeur	$x$	(m)	<b>0.05</b>	0.015	0.05	0.05	0.05
Instant	$\tau$	(s)	<b>900</b>	100	900	900	900
Ordre préd.	$i$	(-)	<b>1</b>	1	2	1	1
Ordre $\frac{\partial^i \tilde{\theta}}{\partial \tau^i}$	$m$	(-)	<b>0</b>	0	0	10	0
Pas de temps	$\Delta\tau$	(s)	<b>30</b>	30	30	30	9
<b>Sorties</b>							
Polynôme	$Q_m$	(-)	$4.16 \cdot 10^{-6}$	$3.35 \cdot 10^{-5}$	$2.39 \cdot 10^{-8}$	$6.26 \cdot 10^{-7}$	$4.16 \cdot 10^{-5}$
Reste	$S_{\text{max}}$	(-)	$2.31 \cdot 10^{-8}$	$1.35 \cdot 10^{-6}$	$1.86 \cdot 10^{-10}$	$1.06 \cdot 10^{-14}$	$2.31 \cdot 10^{-8}$
Erreur	$\delta\theta_n^{(i\ m)}$	(°C)	0.23	2.33	0.02	0.04	0.03

La table 2.2 donne la valeur de l'erreur de couplage prédite analytiquement selon la position spatio-temporelle du point considéré (cas  $C_1$ ), l'ordre du prédicteur ( $C_2$ ), l'ordre du polynôme d'approximation de  $\frac{\partial^i \tilde{\theta}}{\partial \tau^i}$  ( $C_3$ ) et la valeur de l'incrément temporel du schéma de couplage ( $C_4$ ). Le cas  $C_{\text{ref}}$  constitue une référence.

On remarque que l'erreur est plus importante au début du chargement thermique. Il est donc nécessaire de soigner particulièrement les premiers instants du chargement qui sont entachés des plus fortes erreurs. L'explication provient d'une part de la forme analytique de la solution et d'autre part de la diminution rapide de la température dans l'épaisseur de béton, compte tenu des propriétés isolantes de ce dernier. Comme attendu, procéder avec de meilleures approximations amène à une erreur plus faible. Ce comportement atteste d'une convergence rapide des développements en séries (de Taylor et entière) des quantités approchées. Ainsi, en augmentant d'un ordre le niveau du prédicteur, l'erreur analytique diminue d'un ordre de grandeur. De même une approximation à l'ordre 10 de la dérivée permet de gagner un ordre de grandeur. Pour finir, baisser l'incrément temporel réduit considérablement l'erreur de couplage.

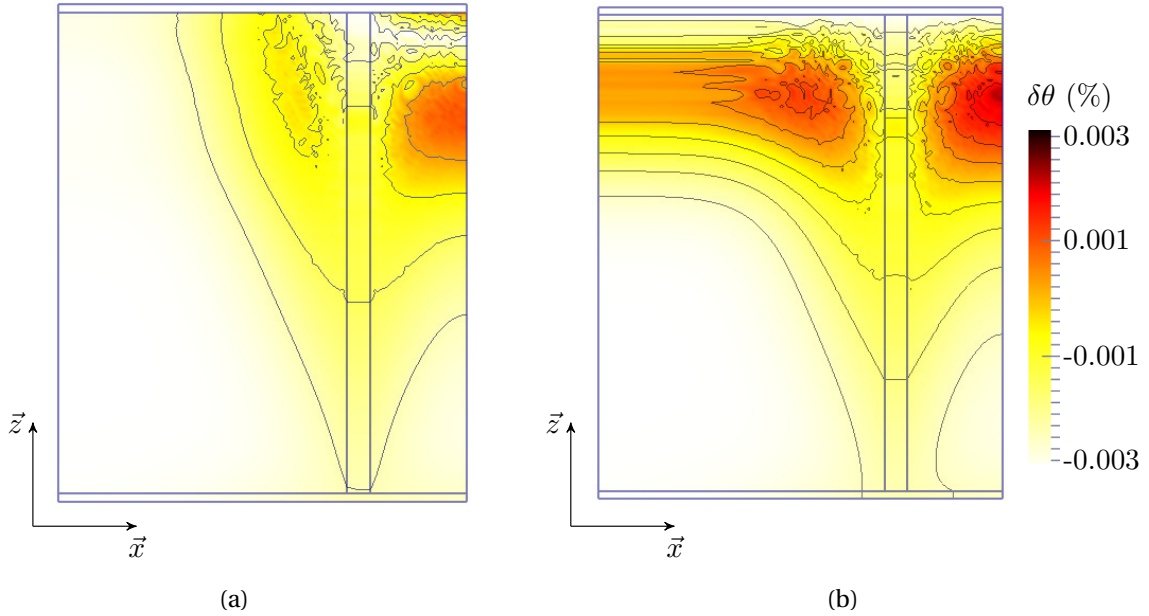
Des approximations importantes des grandeurs impliquées se traduisent par une erreur surévaluée, néanmoins sécuritaire lorsque (2.50) est employée afin de déterminer un incrément de temps pour le calcul numérique. Cependant  $Q_m$  peut être facilement calculé récursivement à un ordre  $m$  élevé de telle sorte que  $S_{\text{max}}$  soit négligeable devant  $Q_m$  (figure C.1). Dans la suite nous confronterons l'erreur calculée au cours du chargement thermique  $\delta\theta_n^{(1\ \infty)}$  à différentes positions au résidu calculé dans les modèles numériques  $\delta\theta_n^{(1)}$

(prédicteur d'ordre 1 et  $m \rightarrow +\infty$ ).

### 3.3 Validation par comparaison avec les résultats numériques

L'étude suivante est réalisée en deux dimensions (2D) afin de travailler avec des mailles raffinées pour minimiser les erreurs résultant de la discrétisation spatiale du problème. Une telle modélisation se traduit par une sur-estimation du puits thermique généré par le connecteur et donc une modification des échanges thermiques à proximité.

Deux modèles sont réalisés. Le premier modèle tient compte des discontinuités mécanique et thermique à l'interface (M1) tandis que l'hypothèse de températures continues à l'interface est réalisée pour le second modèle (M2), même en régime post-critique. La comparaison des flux thermiques entre les deux modèles permettra de qualifier l'effet de la lame d'air sur les transferts thermiques. Pour chaque modèle, la température sans dimensions  $\theta_n$  est calculée à chaque instant  $\tau_n$  et comparée avec le prédicteur utilisé :  $\delta\theta = \theta_n - \theta_n^{\text{pred}}$ . La quantité ainsi calculée est ensuite rapportée au facteur  $(\theta_c - \theta_0)$  pour la rendre sans dimension. On obtient ainsi une grandeur  $\delta\tilde{\theta}_n$  comparable à l'erreur analytique définie par (2.49). La figure 2.17 donne les champs d'erreurs obtenus pour les modèles M1 et M2, à l'instant où  $\theta_n = \theta_{\text{max}}$ .



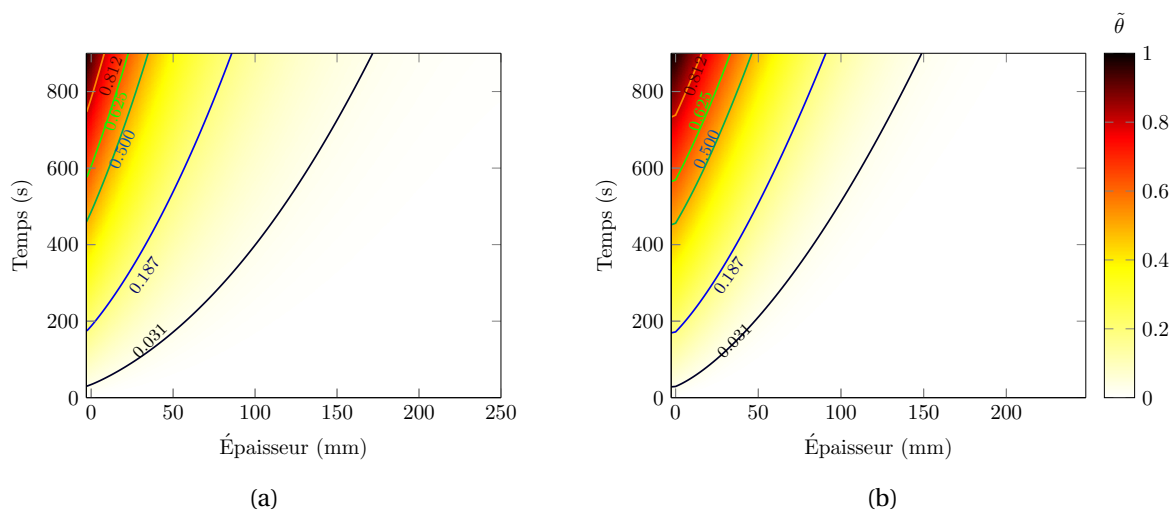
**FIGURE 2.17:** Erreur relative à  $\tau = 900s$  : lame d'air (a), contact thermique parfait (b)

La figure 2.17 montre que le champ d'erreur suit le champ de température avec une erreur maximale de 0.003% atteinte dans les zones où les transferts sont les plus importants. Un petit pas de temps ( $\Delta\tau = 9s$ ) ayant été utilisé dans le calcul, les niveaux d'erreurs sont également réduits. Pour le modèle M2, l'erreur suit essentiellement les transferts conductifs

1D. Elle est alors concentrée en bandes comme le montre la figure 2.17b. La positivité de  $\delta\tilde{\theta}_n$  montre que la température prédictive sous-estime la valeur recherchée. L'erreur est maximale au voisinage du connecteur métallique où ont lieu des transferts thermiques transversaux. En présence d'une lame d'air (M1), la modification des transferts thermiques est importante par comparaison avec le cas continu (figure 2.17a). En effet, à cause de la forte résistance thermique introduite par l'air, l'effet de puits thermique par le connecteur est amplifié. L'erreur se concentre alors dans un cône centré autour du tirant métallique qui se comporte comme une ailette et est refroidi par les transferts thermiques transverses. Lorsque la zone est suffisamment éloignée du connecteur, l'erreur apparaît plus homogène et l'hypothèse de transferts conductifs 1D, valide. Finalement une erreur négative est observable à proximité de la soudure (figure 2.17a). Très localement, la température prédictive surestime légèrement la température réelle suite au puits thermique réalisé par le connecteur.

Dans la suite, la solution analytique exprimée par l'équation (2.49) est calculée numériquement pour chaque point de Gauss de deux zones d'intérêts : le long du connecteur (axe AA' de la figure 2.16a) et à l'aplomb du centre de l'élément SC dite "zone de voilement maximal", le long de l'axe BB' (figure 2.16a). Une résistance thermique à l'interface est considérée. La comparaison sera donc réalisée avec le modèle M1.

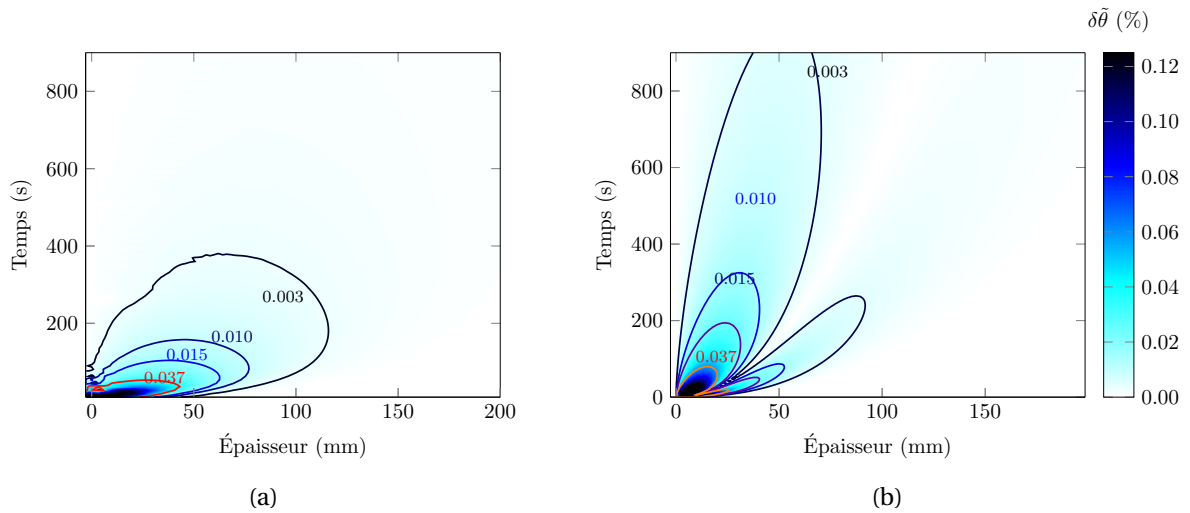
**Erreur de couplage au niveau du connecteur :** Les figures suivantes établissent les comparaisons entre simulation et la solution analytique (2.49) des évolutions de la température (figure 2.18) et de l'erreur (figure 2.19) au voisinage du connecteur.



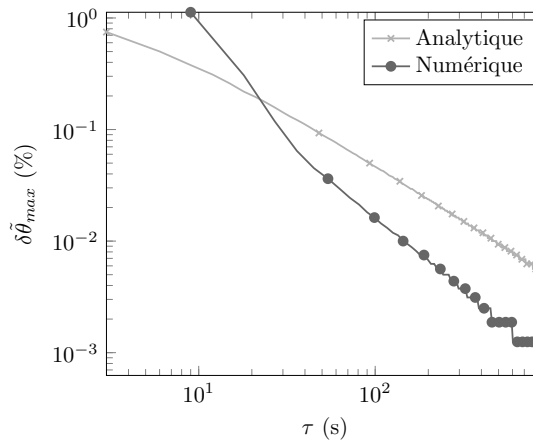
**FIGURE 2.18:** Champs  $\tilde{\theta}$  numérique (a), analytique (b) au voisinage du connecteur

Le modèle analytique surestime légèrement la température. Lorsque le connecteur est fin, comme c'est ici le cas, les écarts dus à la négligence des transferts thermiques transverses restent sécuritaires : l'erreur de couplage prédite analytiquement est plus importante et étendue que l'erreur obtenue numériquement (figure 2.19). Ce constat est dû à l'amplifi-

cation des écarts observés sur la température à cause des dérivations successives. Ici, la prédiction est d'ordre 1 donc l'erreur d'ordre 2. Compte tenu de la forme du résidu analytique, il est cohérent d'observer deux branches divergentes dans la figure 2.19b. En effet, chacune de ces branches correspond à l'un des deux maximums locaux de la dérivée seconde de la fonction  $u \mapsto \text{erf}(u)$  (annexe C partie 3). Ces branches sont absentes de la réponse numérique (figure 2.19a). Deux hypothèses pourraient expliquer ce phénomène.



**FIGURE 2.19:** Champs  $\delta\tilde{\theta}$  numérique (a), analytique (b) au voisinage du connecteur



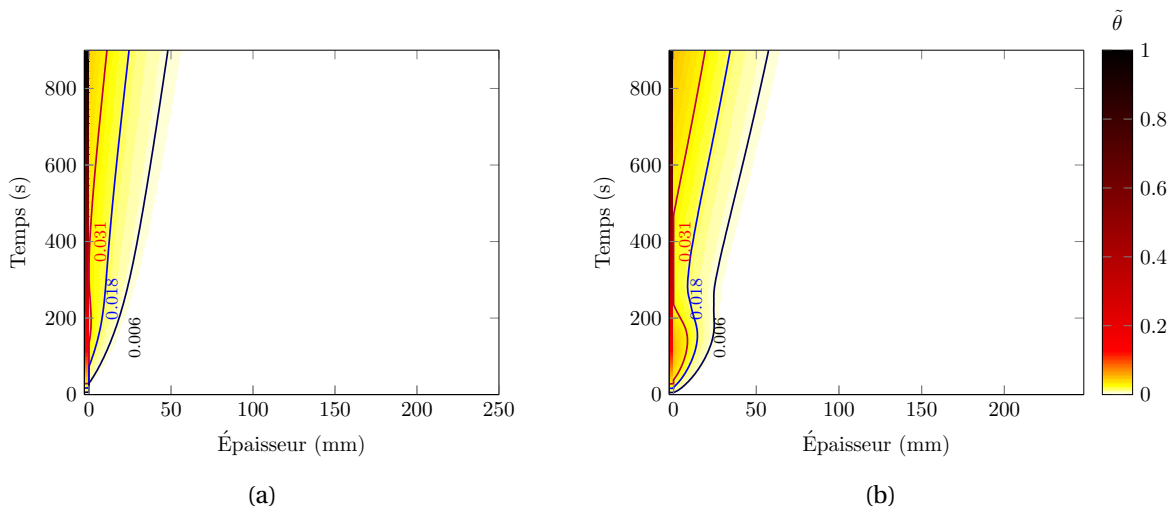
**FIGURE 2.20:** Erreurs maximales  $\delta\tilde{\theta}_{\max}$  en fonction du temps, au voisinage du connecteur

Premièrement, dans la simulation numérique, les dérivées temporelles de la température sont obtenues via la méthode des taux d'accroissement. Cette discrétisation se traduirait par

une plus grande régularité de l'erreur obtenue. Deuxièmement, les écarts observés pourraient incomber à l'influence des transferts transversaux qui homogénéisent temporellement le niveau d'erreur. L'étude de l'erreur de couplage en zone flambée permettra de corroborer la seconde hypothèse.

Enfin, la figure 2.20 présente l'évolution de l'erreur maximale au cours du temps pour les solutions numérique et analytique. L'erreur analytique surestime légèrement le résultat numérique en dehors du premier instant (à  $\tau_0$ , le prédicteur est nul) et suit la même tendance que l'erreur numérique.

**Erreur de couplage dans la zone flambée :** Les figures 2.21 et 2.22 établissent les comparaisons entre simulation et solution analytique des évolutions de la température (figure 2.21) et de l'erreur (figure 2.22) au cœur de la zone flambée. En présence de flambement important, il est nécessaire de tenir compte de la formation d'une lame d'air dont les propriétés de résistance thermique modifient les transferts thermiques. Cette évolution est prise en compte dans la solution analytique en introduisant une dépendance de la température imposée au béton à la résistance thermique de l'interface. Il en résulte une baisse locale de la température faisant suite au changement brusque de cinématique causé par l'instabilité. Ce constat est plus marqué pour la solution analytique (figure 2.21b) mais reste observable pour la première isovaleur ( $\tilde{\theta} = 0.031$ ) de la solution numérique (figure 2.21a). le voilement se produit ici à faible température (30°C) à cause de l'élancement important de l'élément SC considéré ( $s/t_p = 120$ ) en vue de maximiser l'erreur (figure 2.22).



**FIGURE 2.21:** Champs  $\tilde{\theta}$  numérique (a), analytique (b) au centre de l'élément

Contrairement aux observations au voisinage du connecteur (figure 2.19), deux branches divergentes sont visibles sur les champs d'erreurs obtenus pour chacune des deux approches numérique et analytique. Cette observation confirme l'hypothèse selon laquelle le lissage

opéré dans la figure 2.19a est dû aux transferts transverses. Les erreurs numériques et analytiques présentent une bonne correspondance, tant en terme de magnitude que de répartition. Ceci correspond à la meilleure conformité du modèle analytique à distance des connecteurs aux hypothèses formulées, en particulier au meilleur respect de l'hypothèse de conduction 1D. Quelques écarts (figure 2.21) restent néanmoins observables à cause du voilement qui affecte la raideur des éléments utilisés dans le calcul numérique et en conséquence la réponse mécanique de ce dernier.

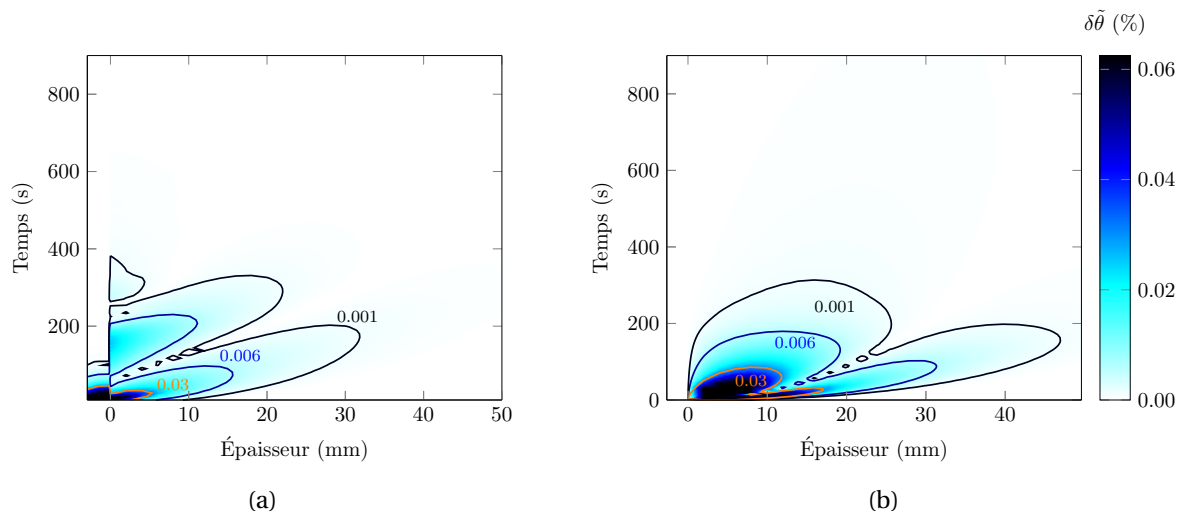


FIGURE 2.22: Champs  $\delta\tilde{\theta}$  numérique (a), analytique (b) au centre de l'élément

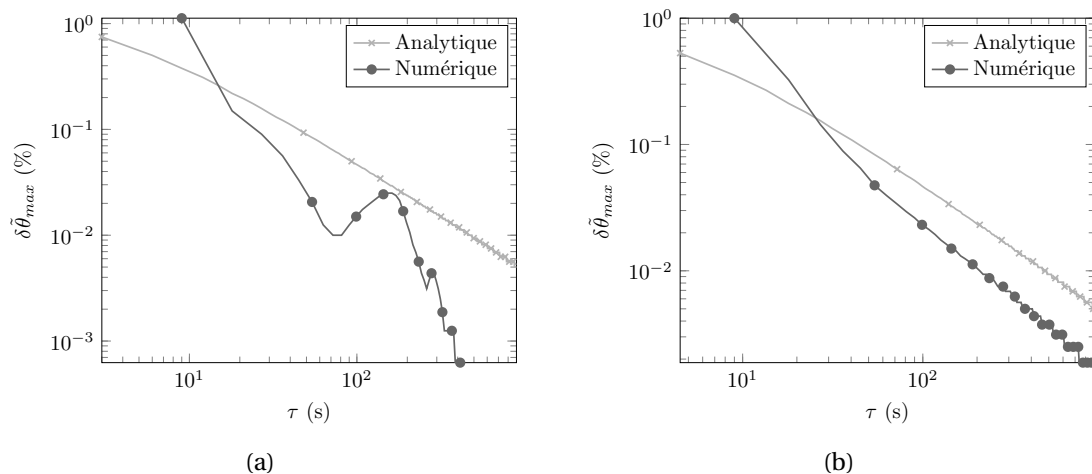


FIGURE 2.23: Erreurs maximales  $\delta\tilde{\theta}_{\max}$  en fonction du temps, au centre de la zone voilée, en présence d'une lame d'air (a), continuité des températures à l'interface (b)

La bonne correspondance entre les valeurs d'erreurs obtenues numériquement et analytiquement est confirmée par les erreurs maximales au cours du temps (figure 2.23a).

Similairement à la figure 2.20, l'erreur maximale analytique surestime légèrement le résultat numérique en dehors du premier instant. La réponse du modèle numérique présente des oscillations (figure 2.23a). Afin de déterminer l'origine de ces dernières, une simulation a été réalisée dans laquelle on impose la continuité des températures à l'interface. On obtient alors une bonne correspondance entre l'erreur observée numériquement et l'erreur prédite analytiquement (figure 2.23b). L'origine des oscillations provient donc de la nature de l'interface. En présence de flambement, la perte brutale de raideur mécanique des éléments d'interface impacte le sous-système thermique. En présence de maillages plus grossiers, le phénomène est amplifié. Il en résulte des pics d'erreurs en 3D donnant lieu à des singularités locales lorsque les instabilités se manifestent.

Dans cette troisième partie, nous avons présenté un outil d'analyse numérique permettant d'estimer l'ordre de grandeur de l'erreur induite par l'utilisation d'un schéma de couplage décalé. L'erreur la plus importante se manifeste au voisinage des connecteurs. Bien que les hypothèses de conduction 1D du modèle analytique soient violées par la présence de transferts thermiques transverses, le poids des échanges conductifs reste suffisamment important pour que la prédiction analytique reste fiable. Il est alors possible de calculer un incrément de temps pour un problème de flambement donné et une tolérance d'erreur donnée. Cet outil se révèle utile dans le cadre des études paramétriques qui suivront, en assurant une meilleure maîtrise du couplage thermo-mécanique.

## Conclusion partielle

Dans ce chapitre, nous avons présenté un modèle fortement non linéaire tenant compte d'un couplage thermo-mécanique pour résoudre numériquement le problème du voilement thermique des SCs.

Nous avons démontré que la méthode de Newton entraine dans le champ des méthodes continues permettant de résoudre de tels problèmes d'instabilité. Toutefois, le passage du point critique et la présence de comportements adoucissants requièrent l'utilisation conjointe de techniques de recherches linéaires pour parvenir à la convergence de l'algorithme. Par ailleurs, afin de déclencher l'instabilité géométrique, une perturbation est introduite sur le maillage telle que la déformée initiale corresponde à celle du premier mode de flambement local.

Un soin particulier est apporté à la modélisation des matériaux acier, béton et interfaces pour lesquels on tient compte de la dégradation avec la température. Les échanges thermiques aux interfaces sont aussi considérés dans le modèle. Ainsi, les éléments cohésifs utilisés dans le maillage des interfaces deviennent également le support d'une lame d'air. Nous introduisons alors une résistance thermique évoluant avec la réponse mécanique permettant de tenir compte de façon approchée des modifications des échanges thermiques en régime post-critique.

Compte tenu de la complexité du modèle, le choix d'un schéma décalé synchrone s'est



alors imposé pour éviter les surcoûts en temps de calcul : la fiabilité de la réponse du système couplé est assurée par une double précaution. L'utilisation de prédicteurs permet une maîtrise des quantités échangées tandis qu'un outil analytique a été développé afin d'estimer l'ordre de grandeurs des erreurs générées par le schéma de couplage.

À partir du modèle numérique ainsi défini nous générerons une base de données numériques permettant d'acquérir une meilleure compréhension du problème de flambement. Ces résultats seront détaillés au chapitre III. Enfin les données obtenues serviront également de référence au dimensionnement d'une campagne expérimentale de validation décrite au chapitre IV.

Les hypothèses présentées, leur justification et la maîtrise des imprécisions inhérentes permettent d'avoir un niveau de confiance suffisamment bon pour l'exploitation de ce modèle dans les chapitres suivants.

## Chapitre III

# Élaboration d'un critère analytique pour le voilement thermique

*Ce chapitre détaille l'élaboration d'une méthode de vérification du cloquage thermique des SC. A partir d'observations numériques, nous poserons le problème du voilement thermique que nous résoudrons par la méthode de Galerkin. Le résultat sera validé puis simplifié pour une application en ingénierie.*

### Sommaire

<b>1</b>	<b>Paramètres pilotant la réponse au voilement thermique</b>	<b>88</b>
1.1	Études de criblage par la méthode des plans d'expériences	88
1.2	Analyse de sensibilité	95
1.3	Couplage plasticité-flambement	98
<b>2</b>	<b>Modèle analytique de voilement thermique pour plaques minces</b>	<b>104</b>
2.1	Hypothèses fondamentales des plaques minces thermoélastiques	104
2.2	Résolution approchée du problème de voilement thermique	113
2.3	Introduction de la plasticité	118
<b>3</b>	<b>Méthode de vérification du voilement thermique</b>	<b>123</b>
3.1	Étude du coefficient de criticité	124
3.2	Comparaison des résultats analytiques et numériques	128
3.3	Méthodologie de vérification destinée à l'ingénierie	131

## Introduction au chapitre III

À l'issue du chapitre I, nous avons soulevé l'absence de recommandations et de données significatives quant à la problématique du cloquage thermique des éléments SCs. Ce vide s'expliquait par les chargements thermiques propres à l'industrie nucléaire à considérer pour que le phénomène dût être pris en compte dans la conception d'une structure. L'objet du présent chapitre consiste à combler cette lacune identifiée dans la norme par l'élaboration d'une méthodologie de vérification des SCs au voilement thermique développée sur la base d'une physique observée numériquement.

Dans une première partie, nous mettrons en application le modèle numérique défini au chapitre II. À l'aide d'études de criblage et de sensibilité, nous identifierons dans une première partie les paramètres et phénomènes physiques qui devront être considérés dans le développement d'un modèle analytique.

Ces conclusions permettront d'écrire dans une deuxième partie le problème général de la plaque thermoélastique, à partir de la théorie des plaques minces de von Kármán et de l'approche du problème en grands déplacements de Föpplé. Nous résoudrons le système obtenu via une méthode approchée de Galerkin. Le détail des calculs et les solutions particulières seront alors fournis dans l'annexe D.

Enfin, dans la troisième partie, nous validerons le modèle analytique sur les résultats numériques. Et nous traduirons le modèle analytique en une méthodologie simplifiée, adaptée à l'ingénierie en amont de la conception des SCs.

## 1 Paramètres pilotant la réponse au voilement thermique

La première partie du chapitre III correspond à la mise en application du modèle numérique élaboré au chapitre II et à la construction d'une base de résultats numériques sur lesquels nous nous appuierons par la suite. Nous situerons les études réalisées en perspective de l'objectif du chapitre : proposer un modèle analytique de flambement afin d'en extraire des critères de dimensionnement adaptés aux éléments SC.

La première étape consiste à déterminer les paramètres significatifs qui seront à considérer dans la solution analytique. Ce but sera atteint en procédant à une étude de criblage menée au paragraphe 1.1. Les résultats de l'étude paramétrique seront ensuite complétés d'une analyse de sensibilité au paragraphe 1.2. Cette dernière nous conduira à nous interroger sur la contribution de la plasticité à la réponse de la plaque voilée dans le dernier paragraphe 1.3.

### 1.1 Études de criblage par la méthode des plans d'expériences

Nous cherchons ici à identifier les paramètres participant à la réponse au voilement thermique des éléments SCs. Pour cela, nous réaliserons des études de criblage grâce à l'utilisation conjointe des plans d'expériences et des simulations numériques. L'étude paramétrique ainsi menée fournira des informations qualitatives des effets des facteurs considérés sur la température critique et l'amplitude du déplacement transverse.

### 1.1.1 Introduction aux plans d'expériences

Les plans d'expériences sont des outils d'optimisation utilisés autant dans la recherche appliquée qu'en ingénierie. Ils consistent en une série d'essais ordonnés de telle sorte qu'un maximum d'informations puissent être extraites d'un minimum de résultats expérimentaux [Goupy, 2000]. Ils sont généralement utilisés afin d'optimiser des réglages, de modéliser un comportement et de déterminer des facteurs clés.

Nous nous intéresserons particulièrement à ce dernier objectif qui est généralement atteint en procédant à des études de criblage. Ces dernières permettent d'évaluer qualitativement l'influence statistique des facteurs recensés par l'utilisateur. La méthodologie d'une telle étude se résume en quatre étapes : le recensement des facteurs d'influence (i), l'attribution de valeurs à ces facteurs. Ces valeurs, pouvant être quantitatives ou qualitatives, discrètes ou continues, sont centrées réduites et dénommées *niveaux*. Le niveau bas prend donc la valeur  $-1$  et le niveau haut, la valeur  $+1$  (ii), la définition du plan factoriel (complet ou réduit) correspondant à l'étude (iii) et la réalisation des essais suivie de leurs interprétations (iv).

**Plans factoriels complets :** Soient  $\{x_i\}$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  l'ensemble des facteurs contribuant à une réponse  $y$ . Réaliser un plan d'expérience complet consiste à tester toutes les  $m$  combinaisons possibles pour chaque valeur associée à chaque facteur afin de construire le modèle :

$$y = a_0 + \sum_i a_i x_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} a_{ij} x_i x_j + \sum_{\substack{i,j,k \\ i \neq j \neq k}} a_{ijk} x_i x_j x_k + \dots \quad (3.1)$$

Le coefficient  $a_0$  correspond à la moyenne  $\bar{y}$  des sorties  $y_l$ ,  $l \in \llbracket 1, 2^n \rrbracket$  de chaque essai réalisé. Le coefficient  $a_i$  représente l'*effet moyen* du facteur  $x_i$  sur  $y$  et les  $a_{ij}$  correspondent à la mesure de l'*interaction* entre les facteurs  $x_i$  et  $x_j$ . La méthode traditionnelle pour déterminer  $a_i$  consiste à fixer les facteurs  $x_j$ ,  $j \neq i$  et à faire varier  $x_i$ . La totalité des mesures n'est alors pas exploitée pour déterminer l'effet d'un facteur. La méthode des plans d'expérience consiste à réaliser les essais aux extrémités du domaine expérimental. Les vecteurs  $\underline{x}_i$ , constitués des valeurs prises par  $x_i$  pour les différents essais, sont alors orthogonaux entre eux. Pour des facteurs à deux niveaux, l'effet moyen de  $x_i$  est alors calculé à partir de la moyenne des sorties  $\bar{y}_{x_i}^+(x)$  obtenues lorsque  $x_i = +1$  moins la moyenne des sorties  $\bar{y}_{x_i}^-(x)$  obtenues pour  $x_i = -1$ .

$$a_i = \frac{1}{2} (\bar{y}_{x_i}^+(x) - \bar{y}_{x_i}^-(x)) \quad (3.2)$$

Par analogie, une interaction peut être déterminée à partir de l'équation 3.3.

$$a_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{y}_{x_i x_j}^+(x) - \bar{y}_{x_i x_j}^-(x)) \quad (3.3)$$

Les effets et interactions sont alors déterminés à partir de l'ensemble des résultats. Cependant le nombre  $s$  nécessaires à l'obtention des coefficients  $a_i$  ou  $a_{ij}$  devient rapidement prohibitif. Pour  $n$  facteurs à deux niveaux,  $2^n$  essais doivent être réalisés si on suit un plan complet afin de déterminer l'ensemble des coefficients du modèle.

**Plans factoriels fractionnaires :** Les plans fractionnaires sont une solution permettant de réduire le nombre d'expérimentations à réaliser au détriment de certaines interactions négligées dans le modèle. Ce sont les plans utilisés pour les études de criblages. Étant considérés  $n$  paramètres  $x_i$  à deux niveaux, on désire réduire le nombre d'essais à  $2^{n-p}$  ( $p \in \mathbb{N}$ ). Les matrices des plans fractionnaires utilisent les matrices des plans complets. Ce sont donc des matrices carrées qui ne permettent d'évaluer que  $2^{n-p}$  effets et interactions sur les  $2^n$  existants. Il est donc nécessaire de retrouver les coefficients manquants du plan complet dans les  $2^{n-p}$  grandeurs étudiées du plan fractionnaire.

Ceci est rendu possible en fixant des contraintes, nommées *aliases*, vraies dans chacune des  $2^{n-p}$  expériences. Soit  $\underline{x}_i$  (resp.  $\underline{x}_j$ ) le vecteur de dimension  $2^{n-p}$  représentatif des valeurs prises par le paramètre  $x_i$  (resp.  $x_j$ ). Les termes  $x_{i_l}$  et  $x_{j_l}$ ,  $l \in \llbracket 1, 2^{n-p} \rrbracket$  valent  $\pm 1$ . Le vecteur  $\underline{x}_k = \underline{x}_i \times \underline{x}_j$  obtenu en réalisant le produit de Hadamard de  $\underline{x}_i$  par  $\underline{x}_j$  : présente les mêmes caractéristiques. Il vient alors pour toutes les expériences  $\underline{x}_i \times \underline{x}_j \times \underline{x}_k = \underline{1}$ . L'aliasie initiale choisie par l'expérimentateur est  $x_k = x_i x_j$  qu'on écrira  $x_i x_j x_k$ .

Par exemple, considérons l'étude d'un plan fractionnaire à  $n = 3$  facteurs pour lequel on souhaite diviser par 2 le nombre d'essais :  $p = 1$ . L'aliasie choisie est  $x_3 = x_1 x_2$ . On remarque alors que  $x_1 = x_2 x_3$ ,  $x_2 = x_1 x_3$ ,  $x_3 = x_1 x_2$  et  $x_1 x_2 x_3 = 1$ . Le modèle se met alors sous la forme  $y = (a_0 + a_{123}) + (a_1 + a_{23}) x_1 + (a_2 + a_{13}) x_2 + (a_3 + a_{12}) x_3$ . On introduit la notion de *contraste* qui traduit une somme algébrique d'effets et/ou d'interactions, ici  $h_0^{\text{pe}} = a_0 + a_{123}$ ,  $h_1^{\text{pe}} = a_1 + a_{23}$ ,  $h_2^{\text{pe}} = a_2 + a_{13}$  et  $h_3^{\text{pe}} = a_3 + a_{12}$ . La matrice des effets du plan réduit s'écrit :

**TABLE 3.1:** Matrice des effets pour un plan  $2^{3-1}$

Essai	1 ( $x_1 x_2 x_3$ )	$x_1$ ( $x_2 x_3$ )	$x_2$ ( $x_1 x_3$ )	$x_1 x_2$ ( $x_3$ )	$y$
1	+1	-1	-1	+1	$y_1$
2	+1	+1	-1	-1	$y_2$
3	+1	-1	+1	-1	$y_3$
4	+1	+1	+1	+1	$y_4$
contraste	$h_0^{\text{pe}}$	$h_1^{\text{pe}}$	$h_2^{\text{pe}}$	$h_3^{\text{pe}}$	

Il est possible de déduire les effets et interactions  $a$  des contrastes  $h$  lorsque les interactions sont négligeables. Le choix de l'aliasie initiale conditionne directement la possibilité de distinguer les effets des facteurs des effets des interactions. Construire un plan d'expérience adapté au problème traité n'est pas toujours aisé. De nombreuses méthodes existent afin de satisfaire à cet objectif. On pourra citer entre autres les méthodes de Box et Hunter [Box *et al.*, 1978] consistant à négliger l'interaction d'ordre le plus élevé, où encore les tables de Taguchi fournissant des tables associées à des graphes linéaires [Taguchi, 1987].

### 1.1.2 Élaboration des plans adaptés au voilement thermique

La problématique du voilement thermique des éléments SCs suggère de rechercher les paramètres influençant la température critique de voilement ( $T_{\text{crit}}$ ) et le déplacement hors-plan ( $w$ ) de la peau métallique. La première étape pour mener les études de criblage consiste à recenser les paramètres pouvant intervenir dans la réponse. Compte-tenu du caractère local du comportement recherché, les études seront réalisées à l'échelle de la maille élémentaire représentée dans la figure 2.1b. Nous nous intéresserons tout particulièrement au poids : de l'élancement de la plaque  $\varphi$  (i), du module d'Young de l'acier  $E_a$  (ii), de la limite d'élasticité de l'acier  $\sigma_y$  (iii), du défaut initial  $\tilde{w}$  (iv), de la raideur imposée aux conditions limites  $K^S$  (v), du diamètre des connecteurs  $\emptyset_g$  (vi), de la modélisation des transferts thermiques à l'interface IPB  $\mathcal{H}_{\text{ipb}}^{\text{th}}$  (vii), de la loi de comportement affectée à l'acier  $\mathcal{H}_a^e$  (viii), et au béton  $\mathcal{H}_b^e$  (ix) et enfin de la vitesse de chauffe  $\dot{T}$  (x). Pour le déplacement, nous ajouterons bien sûr le poids de la température  $T$  (xi).

Les niveaux minimum et maximum des paramètres sont définis par rapport au domaine d'étude et à la littérature (chapitre I). Ainsi, on prendra  $T^- = 20^\circ\text{C}$  et  $T^+ = 200^\circ\text{C}$ . Il en découle directement les niveaux des paramètres matériaux dont les évolutions sont données au chapitre II.  $\dot{T}^-$  correspond à la vitesse de chauffe la plus lente rencontrée lors de l'accident BWA (figure 1.5b) et  $\dot{T}^+$  correspond au chargement type accident grave (figure 1.5a). L'ensemble des paramètres et de leurs niveaux (+ et -) étudiés dans les études de criblage sont répertoriés dans la table 3.2 pour les études de  $T_{\text{crit}}$  et de  $w$ .

**TABLE 3.2:** Paramètres étudiés et leurs niveaux pour  $T_{\text{crit}}$  et  $w$

Sortie	Nom	Symbole	+	-
$T_{\text{crit}} \& w$	$a$	$\varphi$	80	40
$T_{\text{crit}} \& w$	$b$	$E_a$	210000MPa	189000MPa
$T_{\text{crit}} \& w$	$c$	$\sigma_y$	355MPa	235MPa
$T_{\text{crit}} \& w$	$d$	$\tilde{w}$	2mm	0.01mm
$T_{\text{crit}} \& w$	$e$	$\emptyset_g$	13mm	6mm
$T_{\text{crit}} \& w$	$f$	$K^S$	$\infty$	0N & m
$T_{\text{crit}} \& w$	$g$	$\mathcal{H}_a^e$	plastique	élastique
$T_{\text{crit}} \& w$	$h$	$\mathcal{H}_b^e$	mazars	élastique
$T_{\text{crit}} \& w$	$i$	$\mathcal{H}_{\text{ipb}}^{\text{th}}$	lame d'air	contact parfait
$T_{\text{crit}} \& w$	$j$	$\dot{T}$	12°C/min	0.7°C/h
$w$	$k$	$T$	100°C	200°C

Pour  $T_{\text{crit}}$ , on désire étudier les influences de 10 facteurs ainsi que certaines interactions  $\varphi E_a$ ,  $\varphi \tilde{w}$  et  $E_a \sigma_y$ . Pour  $w$  on désire étudier les influences de 10 facteurs ainsi que les interactions suivantes :  $\varphi K^S$ ,  $K^S T$ ,  $T \varphi$ ,  $T E_a$  et  $T \sigma_y$ . Dans les deux cas, on constate que 16 calculs numériques suffisent à obtenir tous les paramètres.

On négligera dans la suite les interactions d'ordre 3. Il convient alors de définir des

plans d'expériences de résolution IV. On assure ainsi que les contrastes associés aux facteurs étudiés ne tiennent compte que des effets des facteurs et d'interactions d'ordre supérieur à 3.

Des plans réduits  $2^{10-6}$  pour  $T_{\text{crit}}$  et  $2^{11-7}$  pour  $w$  réduisent le nombre de simulations numériques à 16 mais ne permettent pas d'assurer l'ordre de résolution recherché. On utilise donc des plans réduits  $2^{10-5}$  pour  $T_{\text{crit}}$  et  $2^{11-6}$  pour  $w$ . Il est alors nécessaire de réaliser 32 calculs numériques pour déterminer l'effet de chaque facteur.

On choisit pour  $T_{\text{crit}}$  les cinq aliases indépendantes suivantes :  $I_1 = abcd f$ ,  $I_2 = abce g$ ,  $I_3 = abde h$ ,  $I_4 = acde i$  et  $I_5 = bcde j$ . On en déduit les aliases dépendantes par combinaisons des produits des  $\{I_n\}$ ,  $n \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ . Il apparaît dans la table 3.3 que les facteurs ne sont jamais couplés à des interactions d'ordre 2.

**TABLE 3.3:** Aliases dépendantes : plan  $2^{10-5}$  de résolution IV

IV	$abij$ $bdgi$	$achj$ $befi\ cdgh$	$adgj$ $cefh$	$ae fj$ $defg$	$bchi$
V	$abfgh$ $bdfhj$ $fghij$	$acfgi$ $beghj$	$adfhi$ $cdfij$	$aeghi$ $cegi j$	$bcfgj$ $dehi j$
VIII	$abcdghij$	$abcefhij$	$abdefgij$	$acdefghj$	$bcdefghi$

On procède de même pour la construction du plan de  $w$  en choisissant cette fois comme aliases indépendantes  $I_1 = abcf$ ,  $I_2 = bcdg$ ,  $I_3 = cdeh$ ,  $I_4 = acdi$ ,  $I_5 = adej$  et  $I_6 = bdek$ . Les aliases dépendantes déduites sont décrites dans la table 3.4. On vérifie ainsi que le plan d'expérience est également de résolution IV.

**TABLE 3.4:** Aliases dépendantes : plan  $2^{10-6}$  de résolution IV

IV	$abgi$ $afhk$ $bfhj$ $dghk$	$abjk$ $bchk$ $cegk$ $dhi j$	$achj$ $bdek$ $ceij$ $efgj$	$adfg$ $bdfi$ $cfgi$ $efik$	$aehi$ $begh$ $cfjk$ $gijk$
VI	$abcegj$ $abefgk$ $acghik$ $bcdefj$ $bdfgjk$ $defghi$	$abceik$ $abefij$ $adegik$ $bcdijk$ $behijk$ $defhjk$	$abdefh$ $acdefk$ $adfi jk$ $bcefhi$ $bfgghk$	$abdghj$ $acd gjk$ $aeghjk$ $bcghij$ $cdfghj$	$abdhik$ $acefgh$ $afghij$ $bdegij$ $cdfhik$
VIII	$abcdeghi$ $acdefgij$	$abcdehjk$ $acefhi jk$	$abcd fghk$ $bcdefgik$	$abcd fhi j$ $bcefghjk$	$abc fgi jk$ $cdeghij k$
X	$abdefghijk$				

## 1.1.3 Vérification des effets et des interactions

TABLE 3.5: Matrices des effets  $2^{10-5}$  pour  $T_{\text{crit}}$  (a) et  $2^{11-6}$  pour  $w$  (b)

(a)

Essai	1	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	ab	ad	bc	bg	cg	af	$T_{\text{crit}}$ (°C)
1	1	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	92.000
2	1	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+	+	+	-	200.000 <sup>1</sup>
3	1	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+	-	-	+	+	200.000
4	1	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	+	-	-	+	-	+	54.200
5	1	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	+	+	-	+	-	+	200.000
6	1	+	-	+	-	-	+	+	-	+	-	-	-	-	-	+	+	54.200
7	1	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	+	+	-	108.800
8	1	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	-	-	200.000
9	1	-	-	-	+	-	-	+	-	-	-	+	-	+	-	-	+	200.000
10	1	+	-	-	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	+	56.200
11	1	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+	-	142.400
12	1	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	+	+	-	+	-	-	200.000
13	1	-	-	+	+	-	+	-	-	+	+	+	-	-	+	-	-	142.400
14	1	+	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	+	-	-	+	-	200.000
15	1	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	+	200.000
16	1	+	+	+	+	-	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	56.200
17	1	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	+	-	142.400
18	1	+	-	-	-	+	-	+	+	+	-	-	-	+	-	-	-	200.000
19	1	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	+	-	+	-	+	200.000
20	1	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	56.200
21	1	-	-	+	+	-	+	-	+	+	+	+	+	-	-	+	+	200.000
22	1	+	-	+	-	+	+	-	+	+	-	-	-	+	+	-	+	56.200
23	1	-	+	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-	-	142.400
24	1	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	+	-	+	+	+	-	200.000
25	1	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+	+	+	+	200.000
26	1	+	-	-	+	+	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	54.200
27	1	-	+	-	+	+	+	+	-	+	-	-	-	-	+	-	-	86.000
28	1	+	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-	+	-	-	+	-	200.000
29	1	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	-	-	-	+	-	115.400
30	1	+	-	+	+	+	-	-	+	-	-	+	+	-	+	-	-	200.800
31	1	-	+	+	+	+	-	-	-	+	-	-	+	+	-	-	+	200.000
32	1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	54.200
contraste	144.194	-16.544	-0.419	-0.419	1.469	0.044	-55.856	-5.506	0.369	-1.419	-0.044	0.369	0.006	-0.044	-0.369	1.419	-16.594	

(b)

Essai	1	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	af	ak	fk	bk	ck	$w$ (mm)
1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	0.195
2	1	+	-	-	-	-	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+	+	7.426
3	1	-	+	-	-	-	+	+	-	+	-	+	-	-	+	+	-	10.172
4	1	+	+	-	-	-	-	+	-	+	+	+	-	+	-	+	-	0.200
5	1	-	-	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	-	+	-	0.488
6	1	+	-	+	-	-	-	+	+	-	+	-	-	-	+	+	-	0.362
7	1	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+	0.466
8	1	+	+	+	-	-	+	-	+	-	+	+	+	+	+	+	+	13.892
9	1	-	-	-	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	0.306
10	1	+	-	-	+	-	+	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-	13.543
11	1	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	-	-	+	-	-	+	0.347
12	1	+	+	-	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	+	-	+	0.215
13	1	-	-	+	+	-	+	-	-	+	+	-	-	-	+	-	+	9.261
14	1	+	-	+	+	-	-	-	-	+	-	+	-	+	-	-	+	0.982
15	1	-	+	+	+	-	-	+	-	-	+	-	+	+	+	-	-	0.195
16	1	+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	+	+	-	-	-	-	7.653
17	1	-	-	-	-	+	-	-	+	-	+	+	+	-	-	-	-	0.689
18	1	+	-	-	-	+	+	-	+	+	-	+	+	+	+	-	-	13.935
19	1	-	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	-	+	-	-	+	2.221
20	1	+	+	-	-	+	-	+	+	+	-	-	-	-	+	-	+	0.205
21	1	-	-	+	-	+	+	+	-	+	+	-	-	-	+	-	+	9.973
22	1	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	0.609
23	1	-	+	+	-	+	-	-	-	+	-	+	+	+	+	-	-	0.396
24	1	+	+	+	-	+	+	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	7.415
25	1	-	-	-	+	+	-	+	-	+	-	-	+	+	+	+	+	0.274
26	1	+	-	-	+	+	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	7.431
27	1	-	+	-	+	+	+	-	-	+	-	+	-	-	-	+	-	9.305
28	1	+	+	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	+	-	+	-	2.509
29	1	-	-	+	+	+	+	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	0.501
30	1	+	-	+	+	+	+	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-	0.455
31	1	-	+	+	+	+	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+	0.492
32	1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	13.145
contraste	4.227	1.397	0.075	0.075	-0.084	0.120	3.692	-0.022	-0.398	-0.130	0.074	1.991	1.239	-0.262	1.743	-0.020	-0.031	

la démarche exposée au paragraphe 1.1.2 permet la construction des matrices des effets pour la température critique (table 3.5a) et le déplacement hors-plan (table 3.5b). Les con-

1. En absence de flambement, la température critique est prise égale à la température imposée maximale.



trastes de chaque facteur pour les deux sorties étudiées sont calculés puis retranscrits graphiquement dans les graphes d'effets 3.1a et 3.1b. Ces derniers mettent en perspective l'évolution de  $T_c$  et  $w$  en fonction des paramètres étudiés.

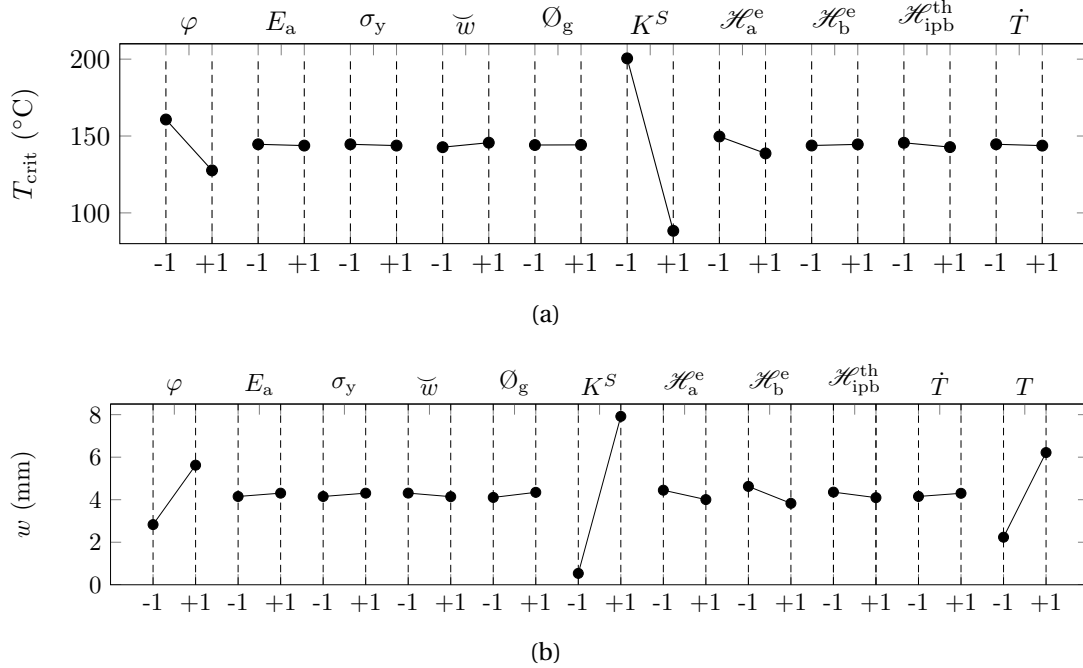


FIGURE 3.1: Effets des paramètres étudiés sur la température critique (a) et le déplacement hors-plan (b)

La figure 3.1a montre immédiatement que **deux paramètres, l'élancement et la raideur des conditions** limites, conditionnent la valeur de la température critique, conformément aux attentes. Ainsi, des conditions limites plus fortement bridées ou une plaque plus élancée auront tendance à abaisser le seuil de criticité et à précipiter le voilement de la plaque chauffée. Dans une moindre mesure, les hypothèses de modélisations portant sur le comportement de l'acier ( $\mathcal{H}_a^e$ ) influencent également la température critique. En effet, un comportement plastique provoque l'instabilité plus rapidement qu'un comportement élastique.

Dans le cas du déplacement hors-plan, outre les facteurs  $K^S$  et  $\varphi$ , il faut évidemment tenir également compte de la participation de la température à la réponse. **Le déplacement est amplifié pour des plaques plus élancées, plus fortement bridées ou sollicitées à des niveaux plus élevés.** Les tables 3.5a et 3.5b montrent que les interactions d'ordre deux faisant intervenir ces facteurs :  $\varphi K^S$ ,  $\varphi T$  et  $K^S T$  ne sont pas négligeables. En effet, on comprend aisément qu'une plaque fortement élancée soumise à des températures importantes ne peut se voiler si elle n'est pas bridée.

**La vitesse de chauffe  $\dot{T}$  et les hypothèses de modélisation des transferts thermiques à l'interface ont un impact très modéré** sur le voilement de la plaque en acier.

Pour finir, il est plus étonnant de remarquer que  $\sigma_y$  et  $E_a$  ont peu d'influence sur la température critique et le déplacement hors-plan. Ce résultat sera discuté plus amplement dans les paragraphes suivants. Par ailleurs, la confrontation des figures 3.1a et 3.1b montre que **l'influence des hypothèses de modélisation du béton est nulle sur la température critique et faible sur le déplacement**. Ces résultats semblent contradictoires : le béton, s'il participe au voilement en procurant une certaine raideur à la plaque devrait avoir une influence tant sur la condition de criticité que l'amplitude du déplacement. Au contraire, son rôle pourrait ne se limiter qu'au bridage de certains modes de flambement et avoir une influence nulle sur la réponse de la plaque en termes de déplacement ou de température critique. L'influence très faible du diamètre des connecteurs sur les deux sorties étudiées tend à confirmer la seconde hypothèse, auquel cas, les conditions limites autres que  $K^S$  seraient du second ordre par rapport au bridage local des bords de la plaque chauffée. Le contraste  $h_{\mathcal{H}_b}^{pe}$  est tel que l'effet de  $\mathcal{H}_b^e$  est aliasé avec l'interaction du troisième ordre  $\varphi K^S T$ . Il est possible que cette dernière soit dominante ce qui expliquerait les écarts que nous venons de discuter.

Les résultats et discussions ainsi présentés seront validés et approfondis par une analyse de sensibilité menée au prochain paragraphe.

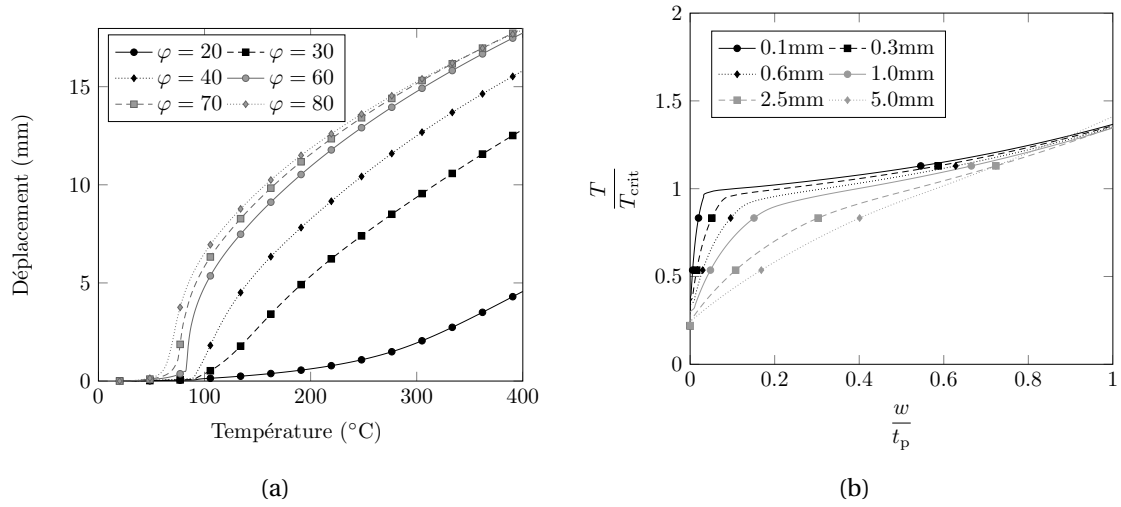
## 1.2 Analyse de sensibilité

L'étude de criblage a permis de mettre en valeur le rôle de différents facteurs dans la réponse au voilement de la plaque. Une analyse de sensibilité enrichit les résultats précédents permettant de mieux appréhender l'impact de chaque paramètre et de confirmer ou réfuter les hypothèses émises. Trois catégories de facteurs sont considérées : les grandeurs géométriques, les conditions limites et les hypothèses de modélisation.

### 1.2.1 Paramètres géométriques

L'étude de criblage du paragraphe précédent a mis en évidence le rôle prépondérant de l'élancement de la plaque dans la réponse. La figure 3.2a présente la déformée hors-plan au centre de la plaque, pour différents élancements de plaques. Des élancements très faibles ( $\varphi = 20$ ) présentent une réponse quasi-linéaire. On l'attribue moins à du flambement qu'à une flexion de la plaque, cette dernière suivant la branche stable de la réponse, en l'absence d'instabilité déclarée.

Les plaques plus élancées présentent une réponse en deux temps. Un premier régime quasi-linéaire de flexion précède un second régime d'amplification brutale de la déformée avec la température. nous qualifierons la température marquant la rupture entre ces deux comportements de la réponse comme étant la température critique. Le premier régime linéaire est alors le régime pré-critique tandis que le second comportement correspond au régime post-critique de la plaque. La température critique ainsi définie correspond aux observations expérimentales de [Murphy et Ferreira, 2001], pour des plaques minces destinées à l'aéronautique. La notion de température critique ainsi définie mérite toutefois des précisions qui seront apportées au §1.3. En effet, nous verrons à ce moment que l'amorce du régime amplifié peut être induite par la plastification de la plaque.

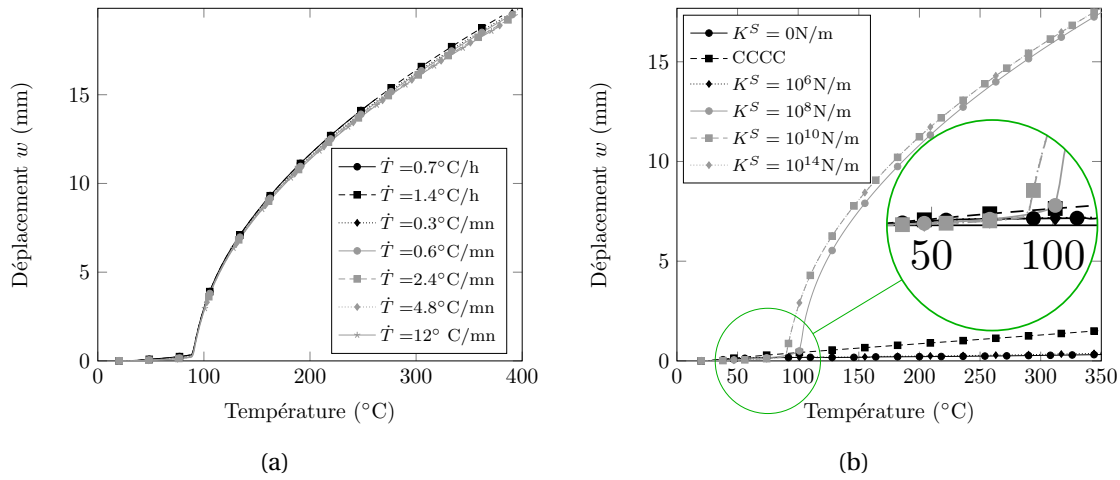


**FIGURE 3.2:** Sensibilité des paramètres géométriques : élancement (a), défaut initial (b)

La figure 3.2b illustre l'influence du défaut initial  $\tilde{w}$ . Ce défaut est imposé comme une perturbation géométrique du maillage conforme au premier mode de flambement. On remarque qu'en présence d'un défaut très important, de l'ordre de l'épaisseur de la plaque (par exemple  $\tilde{w} = 5\text{mm}$ ), les régimes pré- et post-critiques tendent à se confondre. La réponse de l'élément se traduit alors par une amplification en flexion du défaut imposé comme le suggère la linéarité de la phase pré-critique. Pour des défauts intermédiaires, la réponse de la plaque se traduit par une amplification du défaut suivie d'un régime post-critique marqué. La température critique semble peu dépendante de l'amplitude du défaut ; cependant, plus le défaut est faible, plus la discontinuité entre les deux régimes de comportement est marquée. Par ailleurs, il est remarquable que l'ordre de grandeur du défaut imposé se retrouve dans le déplacement à température critique  $w(T_{crit})$ . Lorsque le défaut initial est un artifice numérique imposé en vue de déclencher l'instabilité, [Wright, 1993] recommande de prendre  $\tilde{w} \leq 0.003 s_g$ , ce qui correspond ici à une valeur de 0.9mm. Des défauts plus importants peuvent toutefois être introduits pour modéliser des imperfections résultant de la mise en œuvre du béton ou des soudures entre modules.

### 1.2.2 Conditions limites

L'étude paramétrique a montré que la vitesse de chauffe avait un très faible impact sur la réponse au voilement local de l'élément modulaire SC. L'analyse de sensibilité corrobore ce résultat (figure 3.3a). En effet, la plaque en acier est telle que son temps caractéristique de conduction est suffisamment bas pour que l'élément reste isotherme, même en présence du chargement thermique le plus rapide (Chapitre II, §3.2.1). Les températures s'homogénéisent très rapidement dans l'épaisseur grâce à la conductivité thermique élevée de l'acier. Le moment thermique induit par le gradient de température dans la plaque d'acier pourra donc être négligé dans la suite de notre étude.



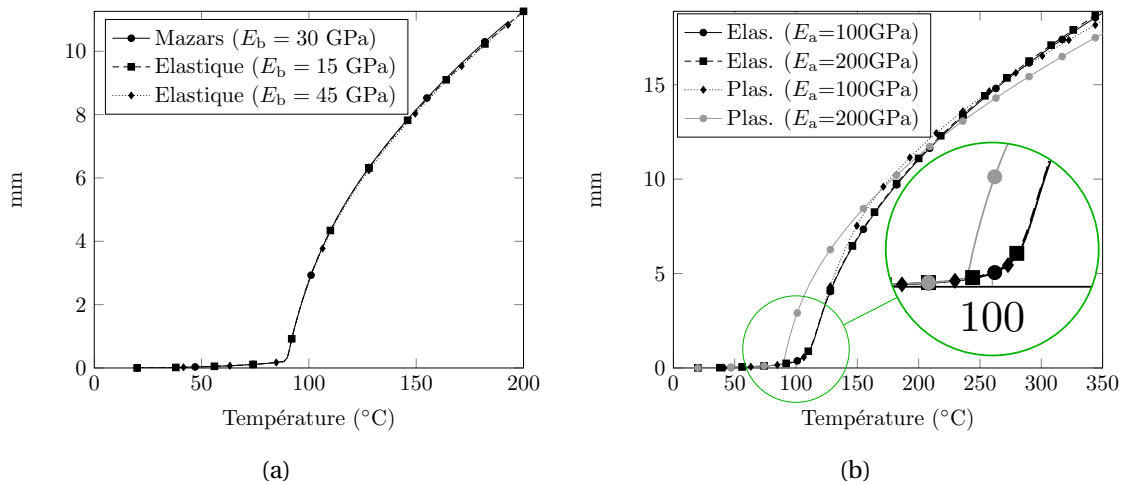
**FIGURE 3.3:** Sensibilité des conditions limites : vitesse de chauffe (a), raideur du bridage (b)

Un paramètre pilotant le voilement thermique local de l'élément SC est la raideur imposée aux conditions limites qui conditionne le bridage dans le plan de la plaque d'acier chauffée. Ces conditions limites sont définies par des ressorts placés en chaque nœud du bord de la structure, conformément à la figure 2.1b. La raideur  $K^S$  est prise identique quelle que soit la direction du ressort et varie en fonction des modèles. Un cas supplémentaire a été traité : (CCCC) pour lequel les déplacements sont seulement bridés au niveau de la soudure des connecteurs. En absence de bridage (raideur imposée faible ou nulle, figure 3.3b), l'instabilité géométrique ne se produit pas. Notamment, le bridage CCCC se traduit par une évolution linéaire de la déformée et prouve que la raideur procurée par le système *connecteur+béton* est insuffisante pour provoquer le flambement de la tôle à une échelle d'étude locale. Au delà d'un certain seuil en raideur (ici observable pour  $K_{\text{seuil}}^S = 10^8\text{N/m}$ ), le phénomène de voilement se déclare. Les réponses convergent rapidement pourvu que  $K^S \approx E_a/10$ . Dans ces conditions, on pourra considérer comme parfait le bridage des déplacements plans. La vue du détail montre que dans tous les cas, le voilement semble se produire en trois phases : déplacement nul (i), réponse linéaire en température (ii) et régime post-critique pour lequel le déplacement hors-plan s'accélère (iii).

### 1.2.3 hypothèses de modélisation

Pour finir, les influences des hypothèses de modélisation sur le voilement thermique local des SCs sont vérifiées. L'analyse paramétrique a montré que le remplissage béton avait une faible influence sur la réponse. Le graphique 3.4a confirme que la raideur du béton n'a aucune influence sur la réponse de la plaque. Le béton joue donc uniquement un rôle de remplissage et se limite à brider le déplacement hors-plan tel que  $w \geq 0$ . Ce résultat est à tempérer, le niveau très local de modélisation et la définition d'un bridage des déplacements aux bords de la plaque supplantant le bridage naturel assuré par les connecteurs noyés.

Enfin, nous avons observé lors de l'étude de criblage une influence modérée du com-



**FIGURE 3.4:** Sensibilité des hypothèses de modélisation : béton (a), plaque en acier (b)

portement de l'acier sur la température critique. La figure 3.4b illustre la brutalité du flambement en régime plastique tandis qu'en régime élastique une certaine relaxation est permise. Ainsi modifier les valeurs de  $E_a$  et  $\sigma_y$  n'ont d'autre effet que de basculer d'une réponse élastique à plastique ce qui explique les faibles contrastes obtenus dans les tables 3.5a et 3.5b de la page 93.

Les résultats issus de l'analyse de sensibilité confirment et complètent les informations fournies par l'étude de criblage. Le dernier paragraphe de cette partie est consacré au couplage flambement-plasticité. Il permet de distinguer les domaines de fonctionnement des éléments modulaires face au phénomène de cloquage<sup>2</sup> thermique, de qualifier le rôle de la plasticité dans la déclaration de l'instabilité et d'en quantifier le poids.

### 1.3 Couplage plasticité-flambement

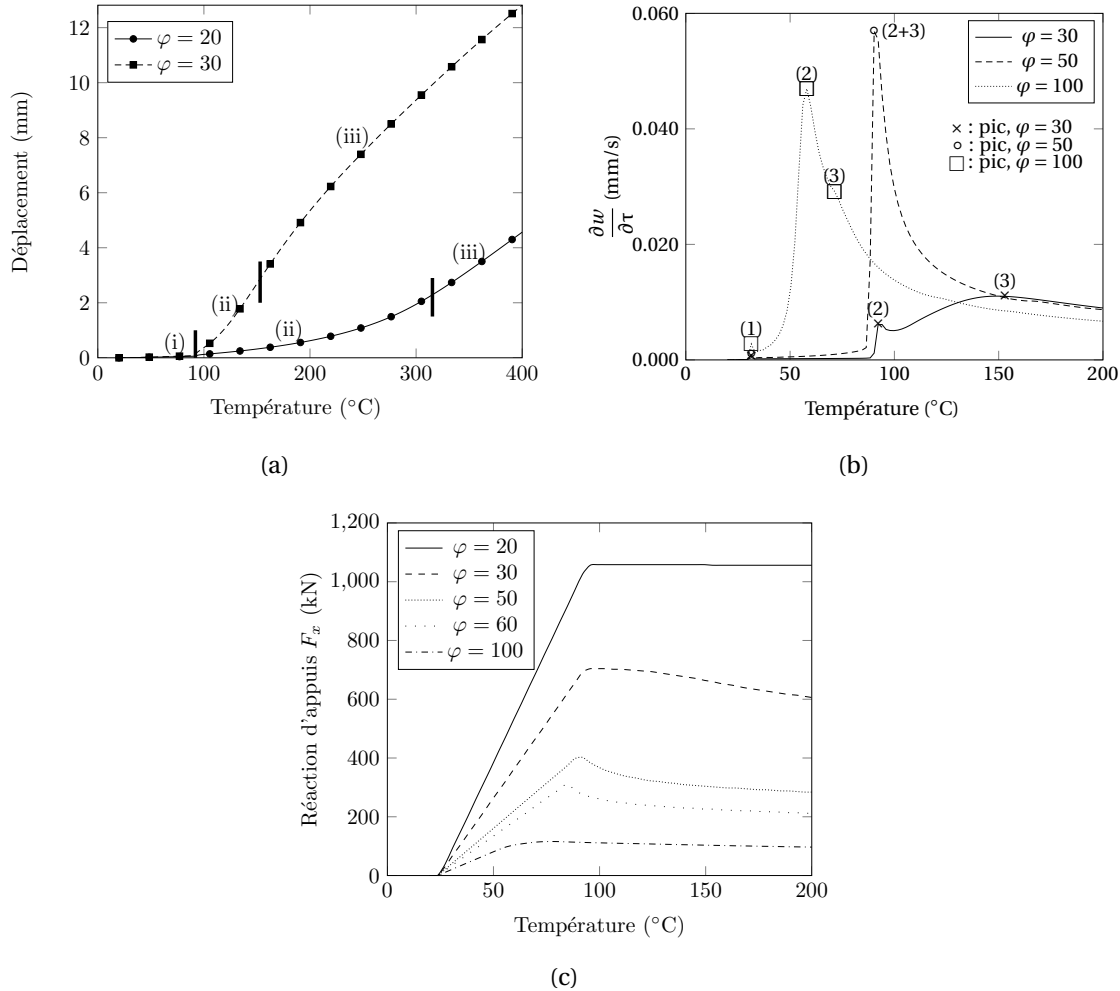
On observe sur la figure 3.2a que le déplacement vertical s'amorce à une température de 92°C, identique pour des plaques aux élancements différents :  $\varphi = 20$ ,  $\varphi = 30$  et  $\varphi = 40$ . Par analogie avec le voilement d'origine mécanique, des élancements différents devraient conduire à des températures critiques différentes (figure 1.11). Il apparaît nécessaire de tenir compte de la contribution de la plasticité à la réponse de la plaque en acier chauffée et d'aborder son couplage avec le voilement.

#### 1.3.1 Régimes de fonctionnement des éléments SC chauffés

Sur la figure 3.5a, un comportement en trois temps est visible pour les éléments d'élancement  $\varphi = 20$  et  $\varphi = 30$ . Le premier régime correspond au régime pré-critique (i). À partir de 92°C, le déplacement  $w$  est amplifié mais suit un régime linéaire conforme à une flexion de

2. voilement local

la plaque (ii). À des températures plus élevées, la réponse en déplacement observée devient non-linéaire avec un changement d'inflexion, suggérant que l'instabilité par flambement se déclare (iii).



**FIGURE 3.5:** Mise en évidence des régimes de fonctionnement en présence de voilement : sur  $w$  (a), sur  $\frac{\partial w}{\partial \tau}$  (b), sur  $F_x$  (c)

L'étude de la dérivée de  $w$  par rapport au temps  $\tau$  enrichit le constat précédent. En effet, la figure 3.5b révèle l'existence de pics de vitesse au nombre maximum de trois notés (1), (2) et (3) pour différents élancements ( $\varphi = 30$ ,  $\varphi = 50$  et  $\varphi = 100$ ). Chaque pic peut être associé à un phénomène à l'origine d'une perte de raideur du système. Le premier pic est de faible amplitude (1). Il se produit à des températures faibles, aux premiers instants du calcul et correspond à la ruine de l'élément cohésif à l'interface plaque-béton. Les pics (2) et (3) peuvent éventuellement être confondus ( $\varphi = 50$ ) ou distincts ( $\varphi = 30$ ). L'un des deux correspond au déclenchement de l'instabilité géométrique tandis que l'autre se manifeste en présence de plastification de la plaque en acier.

L'analyse des réactions d'appuis confirme ces observations et permet de distinguer l'ordre d'apparition des phénomènes. On distingue trois régimes de fonctionnement à l'aide de la figure 3.5c. Premièrement la plaque en acier peut plastifier seule, sans que l'instabilité ne se déclare (i). Les réaction d'appuis présentent alors un palier dû à la plastification de la peau métallique ( $\varphi = 20$ ). Le flambement peut également se produire en régime plastique (ii). Ce cas se traduit par une diminution marquée de la raideur dans le palier plastique suite à l'apparition de l'instabilité géométrique ( $\varphi = 30$ ). Enfin, le voilement peut se produire en régime élastique avant plastification locale ( $\varphi = 100$ ) ou de façon quasi-simultanée ( $\varphi = 50-60$ ). Une perte de raideur se produit alors en régime élastique avant que la limite élastique  $\sigma_y$  ne soit atteinte ; suivie de la formation d'un palier attribuable à la plastification de la plaque.

Il est alors possible de distinguer la température critique :  $T_{crit}$ , propre à l'instabilité par voilement, de la température de plastification de l'acier :  $T_y$ . Tracer l'évolution de ces grandeurs en fonction de la géométrie du système permet d'obtenir un domaine pour chacun des différents régimes de fonctionnement illustré par la figure 3.6.

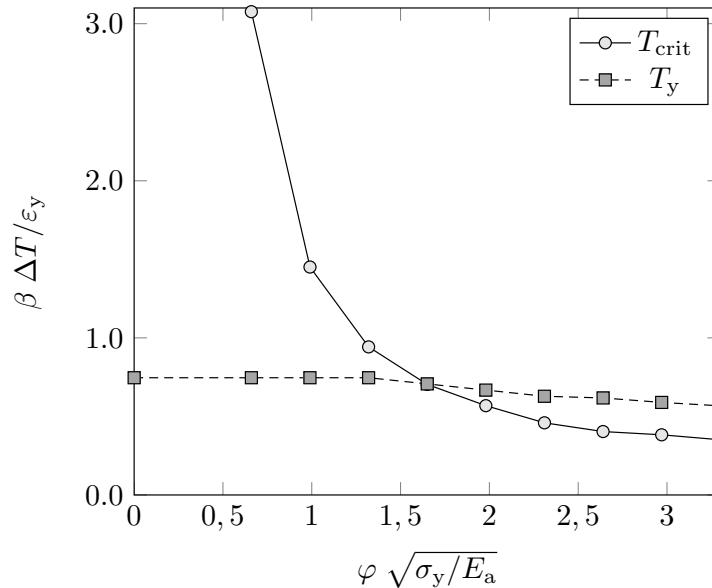


FIGURE 3.6: Domaines de fonctionnement pour  $T_{crit}$  et  $T_y$

### 1.3.2 Développement de la plasticité

La question de l'amplification de la réponse en flexion suite à la plastification sera abordée ici. L'étude du développement de la plasticité fournit des éléments de réponses à cette problématique. Les figures 3.7a à 3.7c représentent les valeurs prises par l'indicateur de plasticité (bleu en régime élastique, rouge en présence de plasticité). Les figures 3.7d à 3.7f fournissent des informations sur la direction du vecteur des déformations principales I.

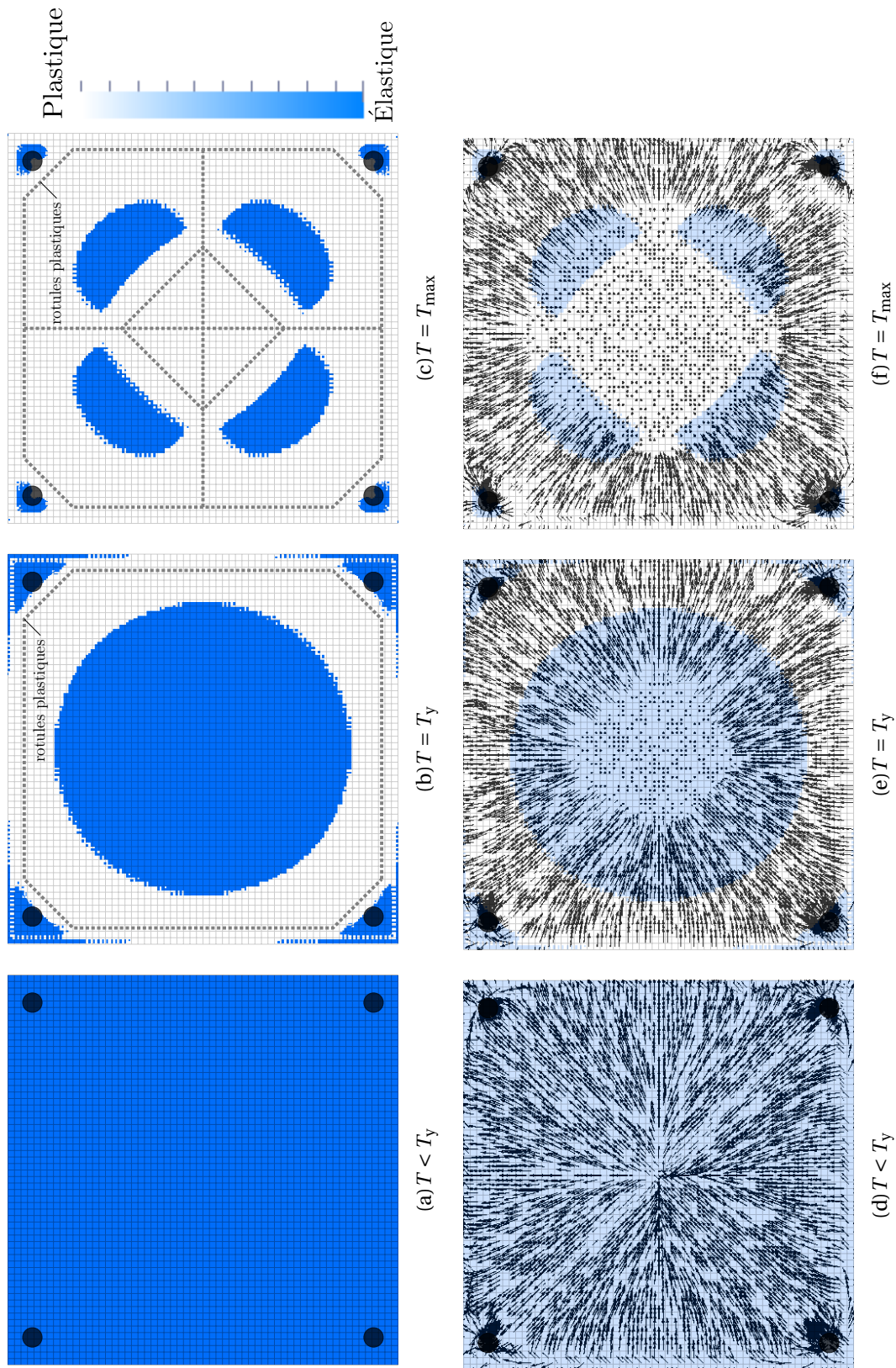


FIGURE 3.7: Indice de plasticité (a-b-c), vecteur des déformations principales 1 :  $\varepsilon_I$  (d-e-f) pour une plaque  $\varphi = 50$



Il apparaît que pour une plaque élancée, la plasticité s'amorce localement au niveau du connecteur puis se propage des bords vers le centre. La zone dans laquelle l'allure de la déformée présente l'inflexion la plus marquée est la dernière à plastifier. L'étude de la direction des déformations principales met en exergue la décharge se produisant des zones élastiques vers les zones plastiques (figures 3.7e et 3.7f). En régime élastique et avant voilement de la plaque, on note sur la figure 3.7d que les directions privilégiées correspondent à un état de chargement biaxial comme supposé au chapitre II,  $\vec{\varepsilon}_I$  étant portés par les diagonales centre-connecteur et les directions cartésiennes  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  du plan. En régime post-critique,  $\vec{\varepsilon}_I$  s'orientent radialement à la zone voilée (figures 3.7e et 3.7f).

La concentration de la plasticité au bord de la structure est à l'origine de la formation de rotules plastiques [Wierzbicki, 2006b] qui, en introduisant un degré de liberté de rotation, amplifient la réponse en flexion de la plaque. En présence de flambement plastique (figure 3.4b), les rotules plastiques participent à la réponse en précipitant l'instabilité. Au contraire, en cas de flambement élastique, l'élasticité assure une reprise des efforts se caractérisant par une relaxation de la réponse en déplacement et une réponse moins brutale.

### 1.3.3 Poids de la plasticité dans la réponse

Pour finir, on s'intéresse au poids de la plasticité dans la réponse au voilement des éléments modulaires. Pour cela, des simulations numériques sont réalisées avec un retour à température ambiante. On récupère alors le déplacement résiduel après décharge  $w_r$  que nous comparons avec le déplacement maximal atteint au cours du chargement :  $w_{\max}$ . Les valeurs du rapport  $\frac{w_r}{w_{\max}}$ , que nous nommerons *poids* de la plasticité, sont explicitées dans la table 3.6.

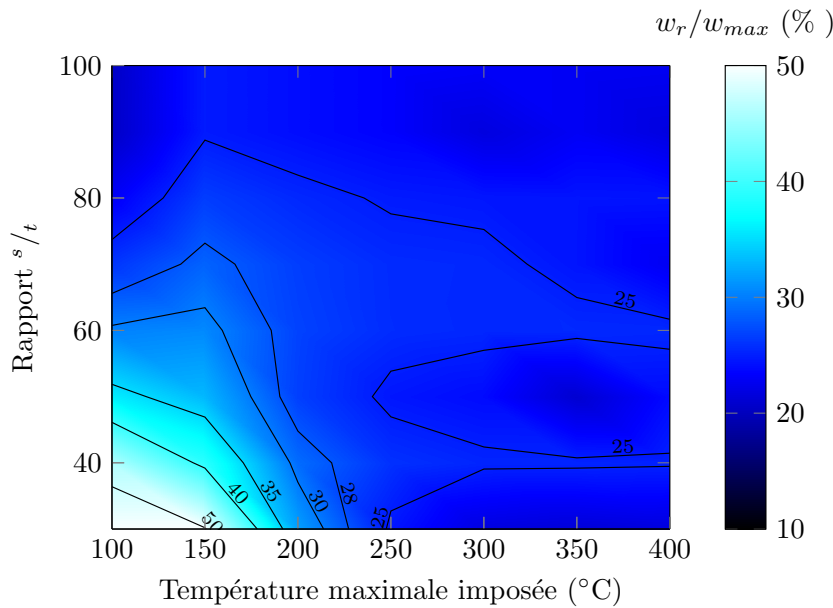
**TABLE 3.6:**  $\frac{w_r}{w_{\max}}$  en fonction de  $T$  et de  $\varphi$

$\varphi =^s /_t$ \ $T$ (°C)	100	150	200	250	300	350	400	moyenne	variance
30	57	50	32	25	22	21	22	33	189
40	46	39	29	26	25	25	25	31	60
50	36	33	27	25	24	21	24	27	26
60	30	31	27	26	25	26	25	27	5
70	26	29	27	26	25	24	23	26	3
80	23	27	26	25	25	24	24	25	1
90	21	25	24	23	22	23	22	23	2
100	21	25	24	23	23	23	23	23	2
moyenne	32	32	27	25	24	24	24	27	
variance	151	66	6	1	2	3	2		47

On relève que le poids de la plasticité varie de 21% à 57% entre 100 et 400°C, pour des plaques dont les élancements sont compris entre  $\varphi = 30$  et  $\varphi = 100$ . Le poids de la plasticité

est d'autant plus important que le déplacement maximal atteint est faible, donc que  $T$  ou  $\varphi$  sont réduits.

La proposition de valeurs moyennées sur  $T$  ou sur  $\varphi$  du rapport  $w_r/w_{\max}$  ne paraît pas judicieuse compte tenu des variances importantes. Les valeurs sont particulièrement dispersées autour de la moyenne pour  $T \leq 150$  et  $\varphi \leq 50$ . Au contraire, une approche moyennée pour quantifier le poids de la plasticité a plus de sens pour  $T \geq 200$  et  $\varphi \geq 60$ . Ce résultat se retrouve dans la figure 3.8.



**FIGURE 3.8:**  $\frac{w_r}{w_{\max}}$  en fonction de  $T$  et de  $\varphi$

Dans la suite, nous utiliserons ces informations au paragraphe 2.3 lors du développement d'un modèle analytique du voilement thermique local de structures SCs.

Dans cette première partie du chapitre III, nous avons mis en évidence les facteurs influents et les paramètres négligeables dans la réponse des éléments modulaires au voilement local d'origine thermique. Comme il était possible de l'anticiper, la température, la raideur des ressorts imposés aux conditions limites et l'élancement de la structure ont une influence manifeste sur les sorties étudiées, en température critique et en déplacement. Les faibles contributions des paramètres matériaux  $E_a$ ,  $\sigma_y$  et des transferts thermiques au comportement post-critique sont plus surprenantes mais ont pu trouver des justifications dans l'analyse de sensibilité complémentaire.

Cette dernière a, entre autres, validé l'hypothèse portant sur l'isothermie de la plaque chauffée (i), traduit les conséquences d'amplification en flexion sur la réponse voilée de la présence d'un défaut initial (ii), souligné les différences entre les réponses élastiques et plastiques en suggérant une étude approfondie du couplage flambement-plasticité dont on ne peut négliger les effets sur le déplacement hors-plan (iii).

L'étude de la plasticité a ainsi mis en valeur trois régimes de fonctionnement : absence de flambement, flambement plastique et flambement élastique à partir desquels nous avons défini les notions de température critique ( $T_{crit}$ ) amorçant le phénomène de voilement, et de température plastique ( $T_y$ ) lorsque la plastification de la plaque se produit localement depuis les bords ou globalement. Par ailleurs, la concentration de la plasticité en bandes induit la formation de rotules plastiques à l'origine d'une amplification de la déformée suivant un comportement de flexion. Il convient alors de définir une température seuil  $T_{seuil} = \min(T_{crit}, T_y)$ , telle que  $w(T > T_{seuil}) \neq 0$  et  $w(T \leq T_{seuil}) \approx 0$ . Pour finir, l'étude de déplacement résiduel après retour à température ambiante offre des informations sur le poids de la plasticité n'excédant pas 20% qui seront utilisées au paragraphe 2.3.

## 2 Modèle analytique de voilement thermique pour plaques minces

L'étude du voilement thermique des structures modulaires fait intervenir des simulations numériques complexes à élaborer. Nous avons en effet insisté au chapitre II sur la nécessité d'artifices numériques (recherche linéaire, introduction d'un défaut initial) pour assurer la convergence en régime post-critique et sur les efforts à mener dans la modélisation des matériaux et interfaces puis sur les aspects couplages. Ces choix de modélisation se traduisent par un coût élevé des calculs numériques réalisés. Leur utilisation en ingénierie se situerait au niveau des études de contrôles en présence de singularités (trémies, jonctions) mais paraît peu adaptée à du dimensionnement pour lequel des solutions analytiques sont préconisées en première approche.

Cette seconde partie présente les hypothèses retenues dans la construction d'un tel modèle analytique. Ce dernier devra être suffisamment précis pour ne pas conduire à un surdimensionnement onéreux tout en se voulant minimaliste et généraliste pour pouvoir en extraire des recommandations et une méthodologie de dimensionnement au voilement d'origine thermique. Il s'agit ici de proposer une réponse à une absence de réglementation identifiée au chapitre I, pouvant s'intégrer au projet de normalisation des éléments modulaires SCIENCE auquel la présente thèse est associée.

Compte tenu des conclusions réalisées à l'issue de la partie 1, deux outils nous paraissent nécessaires pour procéder au dimensionnement des éléments modulaires concernant la problématique du voilement thermique. Le premier aura pour objet la connaissance du mode de fonctionnement d'une géométrie donnée à une température donnée et sera basé pour cela sur le calcul des seuils de criticité et de plasticité (i). Le second outil estimera l'intensité de la réponse en déplacement à une température donnée (ii).

### 2.1 Hypothèses fondamentales des plaques minces thermoélastiques

Ce premier paragraphe de la partie 2 se présente comme un rappel de la théorie des plaques minces basée sur les hypothèses de von Kármán. Nous en adaptons le formalisme

au problème thermoélastique afin d'obtenir les équations fondamentales au développement de la solution analytique présentée au paragraphe §2.2.

Nous préciserons d'abord les conséquences des hypothèses de von Kármán sur la cinématique des plaques. Puis, nous en déduirons les expressions des efforts thermiques et des conditions d'équilibres à partir desquelles nous écrirons le problème de von Kármán-Föppl. Enfin, nous préciserons les hypothèses portant sur les conditions limites.

### 2.1.1 Cinématique des plaques minces

La peau métallique des structures modulaires étudiées dans ce travail se présente comme une surface plane dont la dimension transversale est faible par comparaison avec les dimensions longitudinale et latérale. On les assimile alors à des plaques minces au sens de von Kármán. Cette approximation est à l'origine de simplifications analogues à celles réalisées en théorie des poutres, lorsque les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque considérée.

La théorie des plaques minces formulée par von Kármán repose sur les cinq hypothèses suivantes [Wierzbicki, 2006a] :

1. La plaque considérée doit être fine. C'est-à-dire que la dimension  $t_p$  portée par la troisième direction  $\vec{z}$  doit être petite par rapport aux dimensions  $(s_x, s_y)$  dans le plan de la plaque  $(0, \vec{x}, \vec{y})$  :  $t_p \ll \min(s_x, s_y)$ . En pratique, on considère l'approximation valable pour des plaques dont l'élancement  $\varphi \geq 20$  [Wang *et al.*, 2001]. Le cas échéant, on pourra considérer la théorie des plaques de Reissner-Mindlin qui tient compte des effets du cisaillement transversal [Reissner, 1975, Dawe et Roufaeil, 1982].
2. L'amplitude des déplacements transverses  $w$  est faible par comparaison avec l'épaisseur de la plaque  $t_p$  :  $|w| = O(t_p)$ . En pratique [Wierzbicki, 2006a] précise que l'hypothèse reste valable tant que le déplacement  $w$  n'excède pas la valeur  $10 t_p$ .
3. Les gradients des déplacements plans  $u_{\alpha,\beta}$  sont faibles (avec  $(\alpha, \beta) \in \{x, y\} \times \{x, y\}$ ) si bien que leurs produits sont négligeables en comparaison des autres quantités impliquées.
4. Les hypothèses de Love-Kirchoff sont vérifiées. C'est-à-dire que tout segment droit et orthogonal à la surface moyenne le reste au cours de la déformation. Cela se traduit par deux conséquences : le cisaillement peut être négligé dans la section (en dehors de l'établissement des équations d'équilibre) (i). Les déplacements dans le plan sont fonctions linéaires des déplacements au niveau de la fibre moyenne  $u_\alpha^\circ$  et de la troisième coordonnée  $z$  (ii).

$$u_\alpha = u_\alpha^\circ - z w_{,\alpha} \quad (3.4)$$

5. On se place dans l'hypothèse des contraintes planes : le déplacement hors plan est indépendant de la troisième coordonnée si bien que  $w_{,z} = 0$ .

Dans toute la suite, le matériau acier sera supposé isotrope, conformément aux hypothèses réalisées au chapitre II.

**Expression des déformations planes :** L'équation cinématique permettant de lier la déformation au déplacement est classiquement donnée en grandes déformation par l'opérateur de Green-Lagrange  $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^t - \underline{\underline{Id}})$ . Cette dernière relation peut également s'écrire comme la formule (3.5).

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\nabla}} u + \underline{\underline{\nabla}} u^t + \underline{\underline{\nabla}} u \cdot \underline{\underline{\nabla}} u^t \right) \quad (3.5)$$

Développée dans le système de coordonnées cartésiennes, l'équation (3.5) s'écrit :  $\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{k,\alpha} u_{k,\beta})$  où  $(\alpha, \beta) \in \{x, y\} \times \{x, y\}$  et  $k \in \{x, y, z\}$ . Le terme non linéaire  $u_{k,\alpha} u_{k,\beta}$  se développe en :  $u_{k,\alpha} u_{k,\beta} = u_{x,\alpha} u_{x,\beta} + u_{y,\alpha} u_{y,\beta} + u_{z,\alpha} u_{z,\beta}$  qui se simplifie en  $u_{k,\alpha} u_{k,\beta} = w_{,\alpha} w_{,\beta}$  par application de l'hypothèse (3). Il vient alors :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + w_{,\alpha} w_{,\beta}) \quad (3.6)$$

Soit  $u^\circ$  le déplacement au niveau de la fibre moyenne. L'application de la relation (3.4) issue de l'hypothèse (4) conduit à  $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^\circ - z w_{,\alpha\beta}$ . On définit la courbure  $\kappa_{\alpha\beta}$  par la relation (3.7) :

$$\kappa_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta} \quad (3.7)$$

L'équation (3.6) devient par conséquent :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^\circ + z \kappa_{\alpha\beta} \quad (3.8)$$

Où  $\varepsilon_{\alpha\beta}^\circ = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta}^\circ + u_{\beta,\alpha}^\circ + w_{,\alpha} w_{,\beta})$ .

Dans le cas particulier du voilement des plaques, les efforts sont calculés au niveau du plan moyen tel que  $z = 0$  dans (3.7). Afin de soulager les notations dans la suite, on assimilera abusivement  $u_{\alpha,\beta} \equiv u_{\alpha,\beta}^\circ$  et  $\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta}^\circ$ .

Pour finir, nous tiendrons compte d'un éventuel défaut de forme  $\tilde{w}$  à la manière de [Gossard *et al.*, 1952] en introduisant les quantités  $\frac{1}{2} \tilde{w}_{,\alpha} \tilde{w}_{,\beta}$  dans  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  et  $\tilde{w}_{,\alpha\beta}$  dans  $\kappa_{\alpha\beta}$ .

**Composante hors-plan :** À partir de l'expression (3.6) et de l'hypothèse (5), il vient tout de suite :  $\varepsilon_{z\alpha} = \frac{1}{2} w_{,\gamma} u_{\gamma,\alpha}$ ,  $\varepsilon_{z\beta} = \frac{1}{2} w_{,\gamma} u_{\gamma,\beta}$  et  $\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2} w_{,\gamma} w_{,\gamma}$  où  $\gamma \in \{x, y\}$ . Chacun de ces termes est du second ordre et disparaît lorsque le problème est formulé en petits déplacements. En présence de déplacements modérés, les grandeurs ainsi définies supposent que le cisaillement hors plan et la déformation hors-plan ne sont pas nuls. Les normales à la surface ne restent donc pas nécessairement normales au plan moyen au cours de la déformation [Wierzbicki, 2006a]. Cependant les grandeurs  $\sigma_{z\alpha}$ ,  $\sigma_{z\beta}$  et  $\sigma_{zz}$  sont faibles en comparaison des contraintes planes  $\sigma_{\alpha\beta}$ . Les travaux de ces dernières associées à leurs déformations peuvent donc être négligés du bilan énergétique :  $\int_{t_p} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dz = \int_{t_p} \sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} dz$  où  $(i, j) \in \{x, y, z\} \times \{x, y, z\}$ .

Les expressions des déformations sont enfin :

— Dans l'hypothèse des petits déplacements en incluant un défaut  $\tilde{w}$  :

$$\varepsilon_{xx} = u_{x,x} - \frac{1}{2} \tilde{w}_{,x}^2; \quad \varepsilon_{yy} = u_{y,y} - \frac{1}{2} \tilde{w}_{,y}^2; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (u_{x,y} + u_{y,x} - \tilde{w}_{,x} \tilde{w}_{,y}) \quad (3.9a)$$

— Dans l'hypothèse des grands déplacements en incluant un défaut  $\tilde{w}$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{x,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 - \frac{1}{2} \tilde{w}_{,x}^2 & \varepsilon_{yy} &= u_{y,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 - \frac{1}{2} \tilde{w}_{,y}^2 \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} (u_{x,y} + u_{y,x} + w_{,x} w_{,y} - \tilde{w}_{,x} \tilde{w}_{,y}) \end{aligned} \quad (3.9b)$$

### 2.1.2 Expression des contraintes thermiques

On suppose le matériau élastique dans lequel on tient compte d'une contribution thermique à travers une déformation thermique  $\varepsilon^{\text{th}} = \beta \Delta T$  caractérisant la dilatation du matériau portée à haute température [Heldenfels et Roberts, 1952, Bolay et Weimer, 1960]. On tiendra également compte des raideurs imposées aux conditions limites (figure 2.1b) à travers une déformation notée  $\varepsilon^S$  dont l'expression est donnée par :  $\varepsilon_{\alpha\beta}^S = \frac{f^S}{K_\alpha^S s_\alpha} \delta_{\alpha\beta}$  où  $f^S$  est la force de rappel,  $K_\alpha^S$  la raideur du ressort dans la direction plane  $\vec{\alpha}$  et où  $\delta_{\alpha\beta}$  est le symbole de Kronecker tel que  $\delta_{\alpha=\beta} = 1$  et  $\delta_{\alpha \neq \beta} = 0$ . Un bridage parfait des déplacements sur chaque bord sera obtenu pour  $K^S \mapsto \infty$  si bien que le déplacement  $u^S = \frac{f^S}{K^S} \mapsto 0$ . Le cas des quatre connecteurs seuls pourra également être considéré en prenant la résistance du connecteur au cisaillement pour  $f^S$  et la raideur au cisaillement correspondant à un ensemble de deux connecteurs pour  $K^S$ .

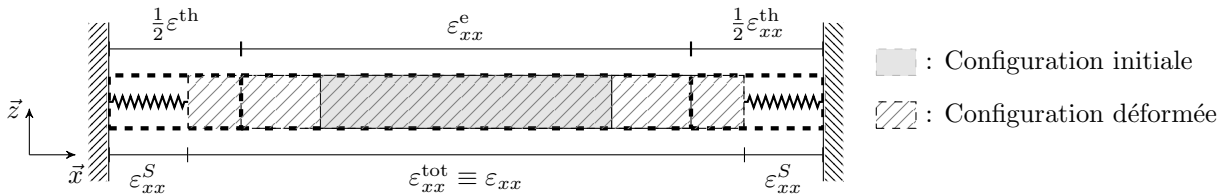


FIGURE 3.9: Déformation du système plaque dans la direction  $\vec{x}$

La loi de comportement élastique s'écrit dans le système de coordonnées cartésien :  $\sigma_{\alpha,\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ (1-\nu) \varepsilon_{\alpha\beta}^e + \nu \varepsilon_{\gamma\gamma}^e \delta_{\alpha\beta} \right]$ . Substituons l'expression  $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^{\text{th}} + 2 \varepsilon_{\alpha\beta}^S$  à la déformation élastique  $\varepsilon^e$  (figure 3.9). La loi de Hooke devient alors l'équation (3.10) dans le cadre de la thermoélasticité :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ (1-\nu) (\varepsilon_{\alpha\beta} + 2 \varepsilon_{\alpha\beta}^S) + \nu (\varepsilon_{\gamma\gamma} + 2 \varepsilon_{\gamma\gamma}^S) \delta_{\alpha\beta} - (1+\nu) \beta \Delta T \right] \quad (3.10)$$

Pour des raisons pratiques, il est coutume, dans le contexte de la théorie des plaques, de préférer les efforts linéiques (rapportés à l'unité de longueur)  $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$ ,  $N_{xy}$  aux contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$ . Ces efforts sont directement obtenus de (3.10) par intégration :

$N_{\alpha\beta} = \int_{-t_p/2}^{t_p/2} \sigma_{\alpha\beta} dz$  et  $M_{\alpha\beta} = \int_{-t_p/2}^{t_p/2} \sigma_{\alpha\beta} z dz$ . Compte tenu de la forme de  $\varepsilon_{\alpha\beta}^S$ , indépendante de la troisième coordonnée, il vient  $M_{\alpha\beta}^S = \frac{2E}{1-\nu} \int_{-t_p/2}^{t_p/2} \left[ (1-\nu) (\varepsilon_{\alpha\beta}^S) + \nu (\varepsilon_{\gamma\gamma}^S) \right] z dz = 0$ . L'expression des efforts et moments est finalement donnée par les expressions (3.11a) à (3.11e) :

$$N_{\alpha\beta} = C \left[ (1-\nu) \varepsilon_{\alpha\beta} + \nu \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] + \left[ (1-\nu) N_{\alpha\beta}^S + \nu N_{\gamma\gamma}^S \delta_{\alpha\beta} \right] - \frac{N^{\text{th}}}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} \quad (3.11a)$$

$$M_{\alpha\beta} = D \left[ (1-\nu) \kappa_{\alpha\beta} + \nu \kappa_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] - \frac{M^{\text{th}}}{(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} \quad (3.11b)$$

$$N^{\text{th}} = \beta E \int_{-t_p/2}^{t_p/2} \Delta T dz \quad (3.11c)$$

$$M^{\text{th}} = \beta E \int_{-t_p/2}^{t_p/2} \Delta T z dz \quad (3.11d)$$

$$N_{\alpha\beta}^S = C \frac{2 f^S}{K_{\alpha}^S s_{\alpha}} \delta_{\alpha\beta} \quad (3.11e)$$

Où  $C$  est la raideur de membrane :  $C = \frac{E t_p}{1-\nu^2}$  et  $D$  est la raideur de flexion telle que  $D = \frac{E t_p^3}{12(1-\nu^2)}$ . Les expressions développées de  $N$  et  $M$  à partir de (3.11) s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} N_{xx} &= C (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) - \frac{N^{\text{th}}}{1-\nu} + N_{xx}^S + \nu N_{yy}^S \\ N_{yy} &= C (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) - \frac{N^{\text{th}}}{1-\nu} + N_{yy}^S + \nu N_{xx}^S \quad N_{xy} = \frac{E t_p}{(1+\nu)} \varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad (3.12a)$$

$$\begin{aligned} M_{xx} &= -D (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) - \frac{M^{\text{th}}}{1-\nu} \quad M_{yy} = -D (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) - \frac{M^{\text{th}}}{1-\nu} \\ M_{xy} &= (1-\nu) D w_{,xy} \end{aligned} \quad (3.12b)$$

Où les expressions des déformations sont données par les relations (3.9a) dans l'hypothèse des petits déplacements ou (3.9b) en présence de grands déplacements.

### 2.1.3 Écriture des équations d'équilibre

La détermination des six grandeurs  $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$ ,  $N_{xy}$  et  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ,  $M_{xy}$  est réalisée en deux étapes. Dans un premier temps, l'équilibre membranaire en deux dimensions ainsi que l'équation de compatibilité dans le plan  $(0, \vec{x}, \vec{y})$  sont utilisés pour exprimer les relations régissant le comportement des efforts normaux. La figure 3.10a illustre l'équilibre des efforts plans pour une membrane élémentaire de dimensions  $(dx, dy)$ . Les équations d'équilibres sont alors données par le système (3.13) :

$$\begin{cases} N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0 \\ N_{yy,y} + N_{xy,x} = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

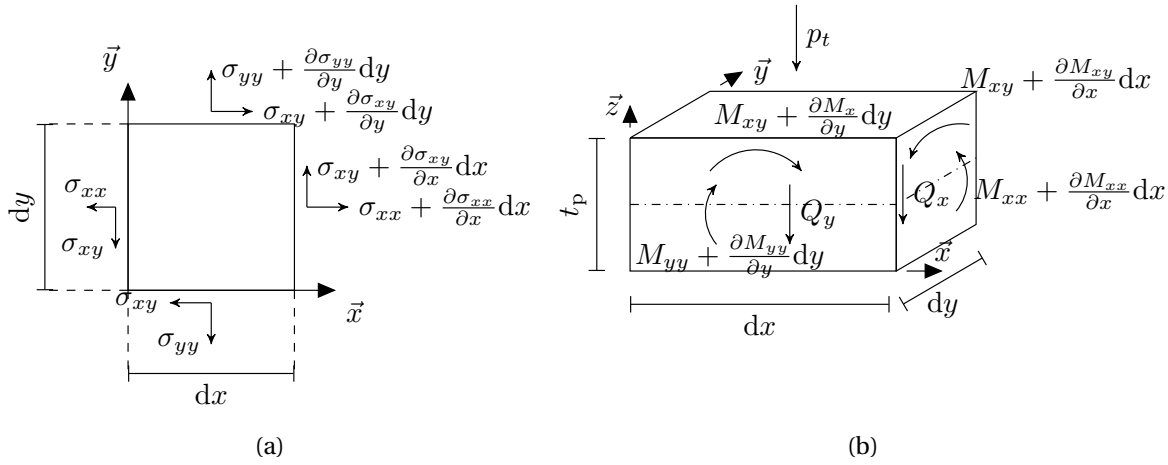


FIGURE 3.10: Conditions d'équilibre de membrane (a) et de flexion (b)

Ces équations sont satisfaites à condition d'introduire une fonction  $F$  dite fonction d'Airy telle que [Bolay et Weimer, 1960] :

$$N_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad N_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (3.14)$$

La résolution du problème membranaire (3.13), hyperstatique, nécessite la connaissance d'une troisième équation pour déterminer les trois inconnues que sont  $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$  et  $N_{xy}$ .

Or, les déformations  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  et  $\varepsilon_{xy}$  ne sont pas indépendantes puisqu'elles sont toutes fonctions de  $(u_x, u_y, w)$ . Les déformations doivent alors vérifier l'équation de compatibilité comme le rappelle [Bažant et Cedolin, 2010]. En dérivant (3.9a) et (3.9b), nous obtenons les équations de compatibilité (3.15a) en présence de petits déplacements et (3.15b) en cas de grands déplacements dans lesquelles apparaît l'imperfection géométrique initiale  $\tilde{w}$ .

$$w \ll h : \quad \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - 2 \varepsilon_{xy,xy} = -\tilde{w}_{,xy}^2 + \tilde{w}_{,xx} \tilde{w}_{,yy} \quad (3.15a)$$

$$w \sim h : \quad \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - 2 \varepsilon_{xy,xy} = w_{,xy}^2 - w_{,xx} w_{,yy} - \tilde{w}_{,xy}^2 + \tilde{w}_{,xx} \tilde{w}_{,yy} \quad (3.15b)$$

On note à partir de (3.12a) que  $\varepsilon_{xx} = \frac{N_{xx} - \nu N_{yy} + N^{\text{th}} - (1 - \nu^2) N_{xx}^S}{E t_p}$ ,  $\varepsilon_{yy} = \frac{N_{yy} - \nu N_{xx} + N^{\text{th}} - (1 - \nu^2) N_{yy}^S}{E t_p}$

et  $\varepsilon_{xy} = (1 + \nu) \frac{N_{xy}}{E t_p}$ . En substituant dans l'équation (3.15), on établit que :  $\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - 2 \varepsilon_{xy,xy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \frac{N_{xx} - \nu N_{yy} + N^{\text{th}} - (1 - \nu^2) N_{xx}^S}{E t_p} \right] - 2 (1 + \nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{N_{xy}}{E t_p} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{N_{yy} - \nu N_{xx} + N^{\text{th}} - (1 - \nu^2) N_{yy}^S}{E t_p} \right]$ .

Enfin, en réinjectant les expressions définies en (3.14), la condition de compatibilité s'exprime simplement à l'aide de la fonction d'Airy sous hypothèse de petits déplacements (3.16a) ou de grands déplacements (3.16b) [Gossard *et al.*, 1952].

$$w \ll h : \quad \nabla^4 F = E t_p \left( -\tilde{w}_{,xy}^2 + \tilde{w}_{,xx} \tilde{w}_{,yy} \right) - \nabla^2 N^{\text{th}} \quad (3.16a)$$

$$w \sim t_p : \quad \nabla^4 F = E t_p \left( w_{,xy}^2 - w_{,xx} w_{,yy} - \tilde{w}_{,xy}^2 + \tilde{w}_{,xx} \tilde{w}_{,yy} \right) - \nabla^2 N^{\text{th}} \quad (3.16b)$$



Où  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  est l'opérateur Laplacien et  $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$  l'opérateur biharmonique.

La seconde partie de la solution, déterminer le déplacement transverse  $w$  est directement issue de la théorie des plaques. On procède en effet à l'équilibre des efforts suivant l'axe  $\bar{z}$  et des moments autour des axes  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$ , pour un volume élémentaire de plaque fléchie de dimensions  $(dx, dy, t_p)$ . La situation est illustrée par la figure 3.10b à l'aide de laquelle sont établies les relations suivantes :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p_t = 0 \quad (3.17a)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + Q_x = 0 \quad (3.17b)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (3.17c)$$

Où  $Q_x$  et  $Q_y$  sont les efforts de cisaillement rapportés par unité de longueur, et  $p_t$  est la résultante des charges transverses.

Substituer (3.17b) et (3.17c) dans (3.17a) amène au problème équivalent (3.18) :

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -p_t \quad (3.18)$$

Enfin, en réinjectant les expressions (3.12b) issues de la loi de Hooke et en tenant compte de l'imperfection initiale, il vient plus simplement l'équation (3.19)

$$D \nabla^4 (w - \bar{w}) = p_t - \frac{1}{1-\nu} \nabla^2 M^{\text{th}} \quad (3.19)$$

Cette dernière équation (3.19) peut être linéarisée en (3.20) en notant que  $D \nabla^2 w = -M - \frac{M^{\text{th}}}{1-\nu}$  [Wierzbicki, 2006a]. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \nabla^2 M_{\Sigma} &= -p_t \\ D \nabla^2 (w - \bar{w}) &= -M_{\Sigma} - \frac{M^{\text{th}}}{1-\nu} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$M_{\Sigma}$  s'écrit alors  $D [\kappa_{xx} + \kappa_{yy}]$  et représente le moment somme de la plaque  $M_{\Sigma} = \frac{M_{xx} + M_{yy}}{1-\nu}$ .

Dans l'hypothèse des petits déplacements,  $p = 0$ . En présence de grands déplacements, il est nécessaire de tenir compte des états fléchis et plans. Lorsque les déplacements des deux problèmes sont du même ordre de grandeur, il est envisageable de calculer indépendamment les solutions aux problèmes (3.16) et (3.19) puis de superposer les résultats.

En présence de déplacements plus importants (régime post-critique), il est nécessaire de tenir compte des dépendances réciproques (figure 3.11). On considère dans la suite le volume de plaque de dimensions élémentaires  $(dx, dy, t_p)$  sur lequel agissent des efforts plans dont les expressions sont données par (3.14).

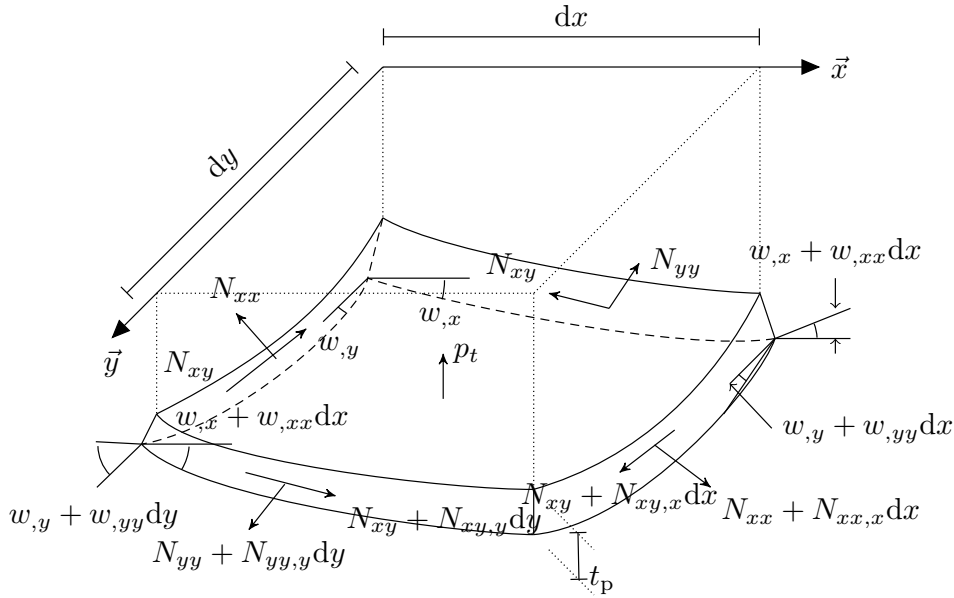


FIGURE 3.11: Équilibre des efforts en configuration déformée, adaptée de [Dubas, 1955]

En présence d'une configuration déformée, la résultante  $p$  des efforts transverses n'est pas nulle et doit tenir compte du projeté des efforts plans sur la déformée [Dubas, 1955]. On obtient l'expression donnée par (3.21).

$$\begin{aligned}
 p_t = & N_{xx} \frac{\partial^2(w - \tilde{w})}{\partial x^2} + \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \frac{\partial(w - \tilde{w})}{\partial x} + \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \frac{\partial^2(w - \tilde{w})}{\partial x^2} dx + 2 N_{xy} \frac{\partial^2(w - \tilde{w})}{\partial x \partial y} \\
 & + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial(w - \tilde{w})}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial^2(w - \tilde{w})}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial(w - \tilde{w})}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial^2(w - \tilde{w})}{\partial x \partial y} dy \\
 & + N_{yy} \frac{\partial^2(w - \tilde{w})}{\partial y^2} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \frac{\partial(w - \tilde{w})}{\partial y} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \frac{\partial^2(w - \tilde{w})}{\partial y^2} dy \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieurs en efforts, l'expression (3.21) se simplifie en (3.22) :

$$p_t = N_{xx} (w - \tilde{w})_{,xx} + N_{yy} (w - \tilde{w})_{,yy} + 2 N_{xy} (w - \tilde{w})_{,xy} \quad (3.22)$$

La résolution du problème de voilement impose de distinguer deux régimes : le comportement pré-critique impliquant des déplacements infinitésimaux et le comportement post-critique où est réalisée l'hypothèse de grands déplacements. La résolution du système pré-critique permettra d'obtenir l'expression du domaine de fonctionnement et en particulier de la température critique. La résolution du problème post-critique permettra de déterminer l'expression de  $w(T)$ .

En présence de moments et d'efforts définis par (3.11), en tenant compte d'un défaut géométrique initial  $\tilde{w}$ , en introduisant la fonction d'Airy (3.14) et en réinjectant (3.18) et

(3.22) dans  $p$  nous obtenons enfin l'équation (3.19) du flambement générale au problème de thermoélasticité des plaques dans nos conditions particulières :

— En régime pré-critique :

$$\begin{cases} D \nabla^4 (w - \tilde{w}) - F_{,yy} (w - \tilde{w})_{,xx} + 2 F_{,xy} (w - \tilde{w})_{,xy} - F_{,xx} (w - \tilde{w})_{,yy} \\ \quad + M_{,xx} - 2 M_{,xy} + M_{,yy} + \frac{1}{1-\nu} \nabla^2 M^{\text{th}} = 0 \\ \nabla^4 F = E t_p \left( -\tilde{w}_{,xy}^2 + \tilde{w}_{,xx} \tilde{w}_{,yy} \right) - \nabla^2 N^{\text{th}} \end{cases} \quad (3.23)$$

— En régime post-critique :

$$\begin{cases} D \nabla^4 (w - \tilde{w}) - F_{,yy} (w - \tilde{w})_{,xx} + 2 F_{,xy} (w - \tilde{w})_{,xy} - F_{,xx} (w - \tilde{w})_{,yy} \\ \quad + M_{,xx} - 2 M_{,xy} + M_{,yy} + \frac{1}{1-\nu} \nabla^2 M^{\text{th}} = 0 \\ \nabla^4 F = E t_p \left( w_{,xy}^2 - w_{,xx} w_{,yy} - \tilde{w}_{,xy}^2 + \tilde{w}_{,xx} \tilde{w}_{,yy} \right) - \nabla^2 N^{\text{th}} \end{cases} \quad (3.24)$$

$D = 0$  correspond au cas particulier de la membrane. Le système (3.24) est constitué de deux équations aux dérivées partielles du quatrième ordre, non linéaires et couplées puisque  $F$  et  $w$  interviennent dans chacune d'entre elles. Il s'agit des équations de von Kármán-Föppl que nous avons transposées au problème thermoélastique. Le problème de von Kármán-Föppl n'admet pas de solutions exactes [Bažant et Cedolin, 2010]. Nous en présenterons au paragraphe 2.2 une solution approchée de (3.24).

#### 2.1.4 Conditions aux limites

Le système d'équation (3.24) admet une infinité de solutions. La solution réelle est définie par ses conditions aux limites. Notre étude se limitera aux plaques rectangulaires, pour lesquelles trois types de conditions limites (**CL**) sont envisageables [Berger, 1954].

**CL1.** La plaque est encastree le long du bord  $x = s_x$ . Le déplacement hors plan est alors nul le long du bord de la plaque ainsi que la rotation. Le plan tangent se confond avec le feuillet moyen non déformé. La condition limite se résume à :

$$w|_{x=a} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=s_x} = 0 \quad (3.25)$$

**CL2.** La plaque est simplement appuyée sur le bord. Le déplacement et le moment sont alors nuls. Il en résulte que les dérivées en  $y$  sont également nulles.

$$w|_{x=a} = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=s_x} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla^2 w|_{x=s_x} = 0 \quad (3.26)$$

**CL3.** La plaque est libre sur son bord. Alors, les moments  $M_{xx}$  et  $M_{xy}$  et l'effort de cisaillement  $Q_x$  sont nuls. Pour rendre possible cette contrainte, les conditions sur  $Q_x$  et  $M_{xy}$  sont artificiellement regroupées en une seule hypothèse :  $Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0$ . Il vient :

$$\nabla^2 w|_{x=a} = 0 \quad \text{et} \quad (w_{,xxx} + (2-\nu) w_{,xyy})|_{x=s_x} = 0 \quad (3.27)$$

## 2.2 Résolution approchée du problème de voilement thermique

Le système d'équations constitutives du problème de voilement thermoélastique (3.24) n'admet pas de solutions exactes. Nous rechercherons donc des solutions approchées des trois inconnues en déplacement  $u_x$ ,  $u_y$  et  $w$ . Le principe consiste à remplacer la résolution d'un problème continu à un nombre infini d'inconnues par celle d'un problème à nombre fini d'inconnues. Les planches détaillant les calculs sont données au paragraphe 1.1 de l'annexe D.

### 2.2.1 Méthode de résolution de Galerkin

Il convient dans un premier temps de définir la forme générale des solutions approchées  $\check{u}_x$ ,  $\check{u}_y$  et  $\check{w}$ , définies dans le domaine  $\mathcal{P}$  de la plaque. On posera :

$$u_x(x, y) \approx \check{u}_x(x, y) = \sum_{i=0}^N U_i \Gamma_i(x, y) \quad (3.28a)$$

$$u_y(x, y) \approx \check{u}_y(x, y) = \sum_{i=0}^N V_i \Phi_i(x, y) \quad (3.28b)$$

$$w(x, y) \approx \check{w}(x, y) = \sum_{i=0}^N W_i \Psi_i(x, y) \quad (3.28c)$$

Où les  $\Gamma_i$ ,  $\Phi_i$ ,  $\Psi_i$  sont des fonctions choisies *a priori* qui constituent une base fonctionnelle. Nous chercherons alors à évaluer les coordonnées généralisées du problème  $U_i$ ,  $V_i$  et  $W_i$   $\forall i \in [0, N]$ . Les fonctions de base choisies doivent satisfaire aux conditions de continuité, conditions aux limites et complétude. Ces conditions sont notamment remplis par les fonctions trigonométriques.

Les inconnues du problème sont alors déterminées en minimisant un critère pouvant être une énergie potentielle, un critère d'erreur ou l'expression des conditions d'orthogonalité de l'erreur avec des fonctions de pondération  $\mathcal{W}_i$  données. Les méthodes de résolution se classent en deux catégories. Les méthodes variationnelles sont utilisées pour des problèmes formulés dans leur forme globale, à l'aide du principe de conservation de l'énergie. Une méthode de Trefftz convient alors pour obtenir l'expression des coordonnées généralisées du problème. Il s'agit de la stratégie suggérée par [Bažant et Cedolin, 2010] pour résoudre l'équation de von Kármán-Föppl. Cependant, l'utilisation de ces méthodes dites *statiques* offrent des solutions approchées qui sont des bornes inférieures de la solution réelle comme nous l'observons en partie 2 de l'annexe D.

Dans l'optique d'une démarche normative, nous préférons une solution approchée borne supérieure de la solution réelle pour garantir une solution sécuritaire vis à vis du dimensionnement de l'ouvrage. Cet objectif est atteint en résolvant le problème d'approximation à l'aide de méthodes *cinématiques* telles que la méthode de Galerkin. De telles méthodes ne sont utilisables que dans le cadre d'une formulation locale du problème. Il est alors nécessaire que les solutions approchées (3.28a), (3.28b) et (3.28c) remplissent les conditions (3.25), (3.26) ou (3.27). Soit  $\mathcal{L}$  le problème de flambement défini par  $\mathcal{L} : (u, v, w) \mapsto D \nabla^4(w -$

$\tilde{w}) - F_{,yy} (w - \tilde{w})_{,xx} + 2 F_{,xy} (w - \tilde{w})_{,xy} - F_{,xx} (w - \tilde{w})_{,yy} + M_{,xx} - 2 M_{,xy} + M_{,yy} + \frac{1}{1-\nu} \nabla^2 M^{\text{th}} = 0$ .  
On définit la fonction erreur  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{P}$  par (3.29) :

$$\mathcal{E} : (u, x) \mapsto \mathcal{L}(\tilde{u}_x(x, y), \tilde{u}_y(x, y), \tilde{w}(x, y)) \quad (3.29)$$

La méthode de Galerkin est une méthode de pondération de l'erreur dans laquelle les fonctions poids  $\mathcal{W}_i$  correspondent aux fonctions de la base fonctionnelle. On aboutit alors au système d'équations (3.30) résultant de l'ensemble des conditions d'orthogonalité à partir duquel les inconnues  $U_i$ ,  $V_i$  et  $W_i$  peuvent être calculées.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_i^U &= \Gamma_i, & \mathcal{W}_i^V &= \Phi_i, & \mathcal{W}_i^W &= \Psi_i \\ \int_{\mathcal{P}} \mathcal{E}(x, y) \mathcal{W}_i^j dx dy &= 0 \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket \text{ et } j \in \{U, V, W\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

## 2.2.2 Résolution du problème post-critique

Afin de simplifier le problème (3.30), les déplacements  $U_i$ ,  $V_i$  et  $W_i$  seront cherchés pour un mode de flambement  $i = mn$  caractérisé par  $m$ , nombre de demi-ondes dans la direction  $\tilde{x}$  et  $n$  le nombre de demi-ondes dans la direction  $\tilde{y}$  (figure D.7). Les solutions approchées deviennent :

$$\tilde{u}_x(x, y) = U_{mn} \Gamma_{mn}(x, y) \quad (3.31a)$$

$$\tilde{u}_y(x, y) = V_{mn} \Phi_{mn}(x, y) \quad (3.31b)$$

$$\tilde{w}(x, y) = W_{mn} \Psi_{mn}(x, y) \quad (3.31c)$$

Par ailleurs, on considère un défaut approché décomposé dans la même base que  $\tilde{w}$  mais pris dans un mode éventuellement différent :

$$\tilde{\tilde{w}} = \tilde{\tilde{W}}_{pq} \Psi_{pq}(x, y) \quad (3.32)$$

Afin d'alléger les notations, on notera par la suite  $U \Gamma$ ,  $V \Phi$ ,  $W \Psi$  et  $\tilde{\tilde{W}} \tilde{\tilde{\Psi}}$  les différentes approximations. Les relations (3.9b) et (3.11a) prouvent immédiatement que les solutions approchées (3.33a), (3.33b), (3.33c) et (3.32) satisfont à l'équation de compatibilité (3.16b) et remplissent *de facto* la première condition du système.

Les fonctions poids retenues correspondent aux fonctions de formes utilisées par [Timoshenko et Gere, 1961]. Dans le cas des éléments modulaires SC, on considère la maille élémentaire représentée par la figure 2.1b simplement appuyée sur ses bords, à l'instar des travaux numériques de [Liang *et al.*, 2004]. Il convient donc de définir :

$$\Gamma : (x, y) \mapsto \sin\left(\frac{m \pi x}{s_x}\right) \cos\left(\frac{n \pi y}{s_y}\right) \quad (3.33a)$$

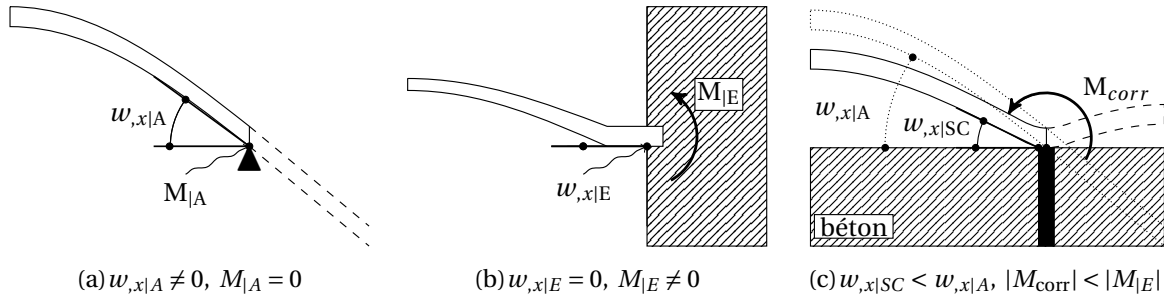
$$\Phi : (x, y) \mapsto \cos\left(\frac{m \pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{s_y}\right) \quad (3.33b)$$

$$\Psi : (x, y) \mapsto \sin\left(\frac{m \pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{s_y}\right) \quad (3.33c)$$

Où  $s_x$  et  $s_y$  sont les espacements entre connecteurs en  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  et donc les dimensions de la maille élémentaire susceptible de se voiler.

Dans le paragraphe 1.2, nous avons explicité le comportement quasi-isotherme de la plaque en acier, si bien que nous avons convenu que le moment thermique  $M^{\text{th}}$  pouvait être négligé devant les efforts plans dus au bridage de la dilatation thermique. Il sera donc pris par la suite  $M^{\text{th}} = 0$ .

L'hypothèse de conditions limites simplement appuyées sur les bords de la plaque libère les rotations aux bords (figure 3.12a). Or, dans le système réel (figure 3.12c), ces rotations ne seront pas parfaitement libres compte tenu du bridage induit par les connecteurs et la présence du béton en parement de la plaque. Par ailleurs, le phénomène s'accroît dans les simulations par éléments finis suite à la reprise de la dilatation thermique en chaque nœud de l'épaisseur de la plaque. Afin de tenir compte d'une entrave partielle des rotations,



**FIGURE 3.12:** Influence des conditions limites sur la rotation  $w_{,x}$  et le moment  $M$  au bord : appui simple (a), encastrement (b), élément modulaire SC (c)

nous introduisons un moment de correction (figure 3.12c)  $M_{\text{corr}} = -\varpi_M M^{\text{eq}}$  où  $\varpi_M$  est un coefficient de pondération que l'on déterminera au paragraphe 1.4 de l'annexe D.  $M^{\text{eq}}$  est le moment équivalent tel que  $M_{\Sigma} = \frac{M^{\text{eq}}}{1-\nu}$ , calculé à partir du moment somme  $M_{\Sigma}$  défini par (3.20). Il est alors naturel de vouloir exprimer  $M_{\text{corr}}$  dans une base fonctionnelle. La relation  $D\nabla^4(\ddot{w} - \ddot{\tilde{w}}) = -M_{\Sigma}$  suggère que  $M_{\text{corr}}$  et  $\ddot{w}$  soient de parité et de période identique. Les variables  $x$  et  $y$  étant indépendantes et  $M_{\text{corr}}$  satisfaisant aux conditions de Dirichlet<sup>3</sup>, il devient possible de décomposer ce dernier en série de Fourier :  $M_{\text{corr}} = \sum m_{mn}^f \Psi_{mn}$ . En transposant la formule des coefficients de Fourier aux fonctions à deux variables, il vient :

$$m_{mn}^f = \frac{4(1-\nu)\varpi_M}{s_x s_y} \iint_{\mathcal{D}} D \left( W [\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}] - \tilde{W} [\tilde{\Psi}_{,xx} + \tilde{\Psi}_{,yy}] \right) dx dy \quad (3.34)$$

Par analogie avec les inconnues de déplacements, on prendra  $M^{\text{eq}} = m_{mn}^f \Psi$ . Les coefficients  $m_{mn}^f$  peuvent être décomposés en  $m_{mn}^f = m_1^f(m, n, W) + m_2^f(m, n, \tilde{W})$  tels que  $m_1^f$  et  $m_2^f$

3. Par définition,  $M_{\text{corr}}$  est continue et bornée.

soient respectivement des fonctions linéaires de  $W$  et de  $\tilde{W}$ . La fonction erreur s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & D \left\{ W [\Psi_{,xxxx} + \Psi_{,yyyy} + 2\Psi_{,xxyy}] - \tilde{W} [\tilde{\Psi}_{,xxxx} + \tilde{\Psi}_{,yyyy} + 2\tilde{\Psi}_{,xxyy}] \right\} \\ & - \left\{ C \left[ U \Gamma_{,x} + \nu V \Phi_{,y} + \frac{1}{2} W^2 (\Psi_{,x}^2 + \nu \Psi_{,y}^2) - \frac{1}{2} \tilde{W}^2 (\tilde{\Psi}_{,x}^2 + \nu \tilde{\Psi}_{,y}^2) \right] + N_x^S + \nu N_y^S - \frac{N^{\text{th}}}{(1-\nu)} \right\} \\ & \left\{ W \Psi_{,xx} - \tilde{W} \tilde{\Psi}_{,xx} \right\} \\ & - \left\{ C \left[ V \Phi_{,y} + \nu U \Gamma_{,x} + \frac{1}{2} W^2 (\Psi_{,y}^2 + \nu \Psi_{,x}^2) - \frac{1}{2} \tilde{W}^2 (\tilde{\Psi}_{,y}^2 + \nu \tilde{\Psi}_{,x}^2) \right] + N_y^S + \nu N_x^S - \frac{N^{\text{th}}}{(1-\nu)} \right\} \\ & \left\{ W \Psi_{,yy} - \tilde{W} \tilde{\Psi}_{,yy} \right\} \\ & - 2 \frac{E t_p}{(1+\nu)} \left\{ U \Gamma_{,y} + V \Phi_{,x} + W^2 \Psi_{,x} \Psi_{,y} - \tilde{W}^2 \tilde{\Psi}_{,x} \tilde{\Psi}_{,y} \right\} \left\{ W \Psi_{,xy} - \tilde{W} \tilde{\Psi}_{,xy} \right\} \\ & + \left\{ m_1^f W + m_2^f \tilde{W} \right\} \Psi_{,xx} + \left\{ m_1^f W + m_2^f \tilde{W} \right\} \Psi_{,yy} - 2 \left\{ m_1^f W + m_2^f \tilde{W} \right\} \Psi_{,xy} \quad (3.35) \end{aligned}$$

La résolution du problème (3.30) dans lequel on réinjecte la fonction erreur (3.35) donne :

$$U = 0 \quad (3.36a)$$

$$V = 0 \quad (3.36b)$$

$$\gamma_1 W^3 + \gamma_2 W^2 + \gamma_3 W + \gamma_4 = 0 \quad (3.36c)$$

Où  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  et  $\gamma_4$  sont les coefficients de Galerkin explicités en annexe D, §1.1.2 par les relations (D.5a) à (D.5d), tels que  $\gamma_2 = \gamma_4 = 0$  pour des fonctions  $\Psi(x, y) \mapsto \sin\left(\frac{m \pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{s_y}\right)$  et  $\tilde{\Psi}(x, y) \mapsto \sin\left(\frac{p \pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{q \pi y}{s_y}\right)$ . L'équation (3.36c) devient  $W \left( W^2 + \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \right)$  et admet trois

racines : la solution triviale  $W_1 = 0$  et les solutions doubles  $W_2 = -W_3 = \sqrt{\frac{\gamma_3}{\gamma_1}}$ . Nous conserverons la solution non triviale positive :  $W = W_2$

### 2.2.3 Résolution du problème pré-critique

La stratégie de résolution du problème pré-critique est identique à celle utilisée dans le problème post-critique. L'objectif est d'obtenir l'expression de la déformée  $w$  traduisant l'amplification de l'imperfection géométrique initiale  $\tilde{w}$ . Pour cela, il est nécessaire que les approximations  $\tilde{w}$  et  $\tilde{\tilde{w}}$  soient exprimées dans le même mode. Contrairement au régime post-critique, nous prenons donc cette fois :

$$\tilde{w} = W \Psi \quad (3.37a)$$

$$\tilde{\tilde{w}} = \tilde{W} \Psi \quad (3.37b)$$

L'expression des déformations en petits déplacements donnée par (3.9a) et des efforts (3.11a) vérifient immédiatement que (3.37a) et (3.37b) sont solutions de l'équation de compatibilité (3.16a). Le moment correctif  $M^{\text{eq}}$ , dont les coefficients  $m^f$  dans la base fonctionnelle  $\Psi_{mn}$  sont donnés par (3.34), n'est pas affecté par le changement de régime puisqu'il dérive immédiatement de la loi de l'élasticité (3.11b).

C'est au niveau du calcul de la résultante des efforts transverses  $p_t$  que des modifications interviennent. En effet, en régime pré-critique il est attendu que l'incrément de déplacement soit faible voir infinitésimal [Dubas, 1955]. Devant une imperfection géométrique importante (de l'ordre du millimètre), nous négligeons la contribution déplacement et effectuons la projection des efforts sur la configuration déformée par le défaut. L'expression (3.22) de  $p_t$  devient alors :

$$p_t = N_{xx} \tilde{w}_{,xx} + N_{yy} \tilde{w}_{,yy} + 2 N_{xy} \tilde{w}_{,xy} \quad (3.38)$$

En réinjectant (3.37) et (3.38) dans (3.19), on obtient la fonction erreur (3.39).

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = D \Big\{ & W [\Psi_{,xxxx} + \Psi_{,yyyy} + 2\Psi_{,xxyy}] - \tilde{W} [\tilde{\Psi}_{,xxxx} + \tilde{\Psi}_{,yyyy} + 2\tilde{\Psi}_{,xxyy}] \Big\} \\ & - \left\{ C \left[ U \Gamma_{,x} + \nu V \Phi_{,y} - \frac{1}{2} \tilde{W}^2 (\tilde{\Psi}_{,x}^2 + \nu \tilde{\Psi}_{,y}^2) \right] + N_x^S + \nu N_y^S - \frac{N^{\text{th}}}{(1-\nu)} \right\} \left\{ \tilde{W} \tilde{\Psi}_{,xx} \right\} \\ & - \left\{ C \left[ V \Phi_{,y} + \nu U \Gamma_{,x} - \frac{1}{2} \tilde{W}^2 (\tilde{\Psi}_{,y}^2 + \nu \tilde{\Psi}_{,x}^2) \right] + N_y^S + \nu N_x^S - \frac{N^{\text{th}}}{(1-\nu)} \right\} \left\{ \tilde{W} \tilde{\Psi}_{,yy} \right\} \\ & - 2 \frac{E t_p}{(1+\nu)} \left\{ U \Gamma_{,y} + V \Phi_{,x} - \tilde{W}^2 \tilde{\Psi}_{,x} \tilde{\Psi}_{,y} \right\} \left\{ \tilde{W} \tilde{\Psi}_{,xy} \right\} \\ & + \left\{ c m_1 W + c m_2 \tilde{W} \right\} \Psi_{,xx} + \left\{ c m_1 W + c m_2 \tilde{W} \right\} \Psi_{,yy} - 2 \left\{ c m_1 W + c m_2 \tilde{W} \right\} \Psi_{,xy} \end{aligned} \quad (3.39)$$

La résolution du problème (3.30) dans lequel on réinjecte la fonction erreur (3.39) donne :

$$U = 0 \quad (3.40a)$$

$$V = 0 \quad (3.40b)$$

$$\gamma_5 W + \gamma_6 = 0 \quad (3.40c)$$

Où  $\gamma_5$  et  $\gamma_6$ , sont les coefficients de Galerkin explicités en annexe D, §1.1.1 par les relations (D.2a) et (D.2b). La solution de  $W$  s'écrit donc simplement :  $W = -\frac{\gamma_6}{\gamma_5}$ . Afin d'imposer  $W(\Delta T = 0) = 0$ , il est nécessaire de réaliser une translation sur les ordonnées ne modifiant pas l'évolution de  $W$  en fonction de la température  $T$ .  $W$  devient finalement  $W = -\frac{\gamma_6(\Delta T) - \gamma_6(0)}{\gamma_5}$

## 2.2.4 Expression des solutions

L'annexe D présente les détails des différentes solutions analytiques qui ont pu être obtenues à partir de la méthode décrite en 2.2 et des hypothèses avancées en 2.1. A cette occasion, nous remarquons que les solutions  $W_{af}$  en régime pré-critique et  $W_{pf}$  en régime post-critique s'expriment sous les formes :  $W_{af} = \zeta_1 \Delta T$  (D.3a) et  $W_{pf} = \sqrt{\zeta_2 \Delta T + \zeta_3}$  (D.6a). Les coefficients  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$  sont explicités par les tables D.1 à D.5 pour différents cas d'études incluant : la maille élémentaire SC (§D.1.3.2), la plaque simplement appuyée (§D.1.3.2), la plaque encastree (§D.1.3.3), la maille SC avec chargement mécanique (§D.1.3.4) et la maille SC (§D.1.3.5) en présence d'un champ de température variable  $T(x, y)$  (§D.1.3.6).



Trois catégories sont proposées pour chaque étude. La solution complète dans sa forme la plus générale est à réserver à un usage numérique suite aux expressions complexes des coefficients. Deux niveaux de simplification sont ensuite proposés. Le premier consiste à ne considérer que le flambement dans le premier mode ( $m = n = p = q = 1$ ) ce qui allège considérablement les expressions de  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$ . Le dernier niveau de simplification consiste à considérer un parfait bridage des déformations planes ( $K_x^S \rightarrow \infty$  et  $K_y^S \rightarrow \infty$ ) ainsi qu'un espacement identique des connecteurs en  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  :  $s_x = s_y$ . Ces hypothèses conservatives au sens du dimensionnement et classiques dans la conception des éléments modulaires conduisent à des expressions simplifiées des coefficients  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$ .

Dans la suite de ce travail, nous étudierons la solution générale du cas SC (table D.1) dont les coefficients sont rappelés (3.41a) à (3.41f) :

$$\zeta_1 = \frac{-12(v+1)\gamma^2 t_p \varphi^2 \beta \xi}{(\gamma^2 v \varpi_M n^2 - \gamma^2 n^2 - \gamma^2 \varpi_M n^2 + m^2 v \varpi_M - m^2 - m^2 \varpi_M) \pi^2} \quad (3.41a)$$

$$\zeta_2 = \frac{32\gamma^2 \varphi^2 t_p^2 \beta (n^2 \gamma^2 + m^2 + v n^2 \gamma^2 + m^2 v)}{\pi^2 (3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 v n^2 \gamma^2)} \quad (3.41b)$$

$$\zeta_3 = \zeta_{31} \xi^2 + \zeta_{32} f^S + \zeta_{33} \quad (3.41c)$$

avec,

$$\zeta_{31} = \frac{4 t_p^2 (\gamma^4 q^2 n^2 + m^2 v q^2 \gamma^2 + m^2 p^2 + p^2 v n^2 \gamma^2)}{(3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 v n^2 \gamma^2)} \quad (3.41d)$$

$$\zeta_{32} = \frac{-64 \varphi t_p \gamma (m^2 v \gamma K_x^S + m^2 K_y^S + \gamma^3 n^2 K_x^S + v n^2 \gamma^2 K_y^S)}{\pi^2 K_x^S K_y^S (3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 v n^2 \gamma^2)} \quad (3.41e)$$

$$\zeta_{33} = \frac{8}{3} \frac{t_p^2 (-m^4 + 2 m^2 v \varpi_M n^2 \gamma^2 + \gamma^4 v \varpi_M n^4 - m^4 \varpi_M + m^4 v \varpi_M - n^4 \gamma^4 - 2 m^2 \varpi_M n^2 \gamma^2 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 - \gamma^4 \varpi_M n^4)}{3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 v n^2 \gamma^2} \quad (3.41f)$$

Où  $\gamma = \frac{s_x}{s_y}$  est le rapport des dimensions planes,  $\varphi = \frac{s_y}{t_p}$  est l'élancement et  $\xi = \frac{\bar{W}}{t_p}$  est le défaut normalisé sur l'épaisseur. On pourra prendre  $\varpi = \left(\frac{\varphi}{58}\right)^2$  d'après l'équation (D.13). Pour une application à de l'ingénierie, nous recommandons l'usage des solutions simplifiées.

## 2.3 Introduction de la plasticité

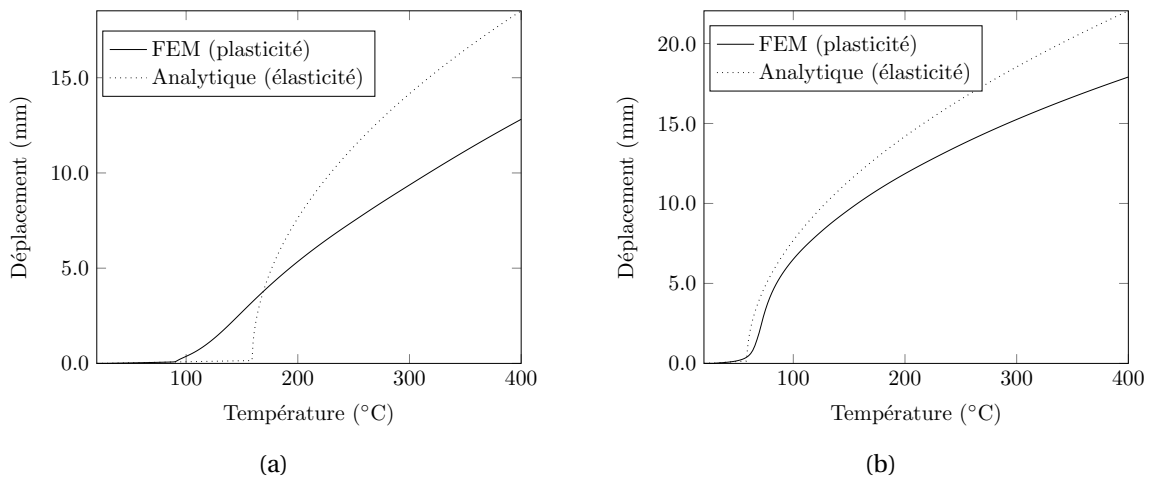
La solution (3.41) développée analytiquement repose sur l'hypothèse du matériau élastique (3.10). Or, nous avons montré au paragraphe 1.3 que la plasticité entraînait des modifications du comportement, notamment sur deux aspects essentiels.

Premièrement, la plasticité, lorsqu'elle apparaît avant le flambage, est à l'origine d'une amplification de la déformée (figure 3.5a) due à la formation de rotules plastiques aux bords de la plaque.

Deuxièmement, la déformée en présence de plasticité est réduite par rapport au cas élastique (figure 3.4b). Nous avons par ailleurs estimé par le biais de simulations numériques que le poids minimal de la plasticité représentait 20% de la réponse totale (table 3.6).

### 2.3.1 Lacunes du modèle analytique élastique

La confrontation des résultats obtenus par éléments finis avec la solution, analytique définie par l'équation (3.41), montre que cette dernière ne tient pas compte des particularités que nous venons d'énoncer (figure 3.13). Ainsi pour des plaques peu élancées, la phase de transition n'est pas représentée (figure 3.13a) tandis que les écarts entre solutions analytique et numérique s'accroissent avec la température pour des plaques plus élancées (figure 3.13b). Ces écarts résultent de l'hypothèse d'un comportement élastique dans l'élaboration du modèle analytique par opposition au modèle élasto-plastique utilisé dans les simulations numériques..



**FIGURE 3.13:** Solution analytique élastique vs calcul élément finis tenant compte de la plasticités :  $\varphi = 30$  (a),  $\varphi = 80$  (b)

### 2.3.2 Modèles de flambement plastique

Dans la littérature, deux approches pour modéliser le flambement plastique coexistent [Bloom et Coffin, 2000]. La première consiste à concevoir le problème de flambement plastique dans le cadre de la théorie des écoulements plastiques [Wang *et al.*, 2001]. Cette théorie faisant intervenir l'historique du chargement, n'est pas adaptée au développement d'une solution analytique formulée en déplacement telle que nous l'avons présentée en 2.1.

La seconde approche se base sur la théorie de la déformation J2 dans laquelle l'historique de déformation est négligé tandis que le matériau se comporte comme un solide élastique non-linéaire [Hutchinson et Neale, 1978], par l'intermédiaire par exemple d'une loi de comportement de Ramberg-Osgoodrachi. Cette méthode consiste à remplacer les paramètres élastiques du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  dans l'expression de la contrainte critique par des grandeurs réduites  $E^{eq}$  et  $\nu^{eq}$  telles que  $\eta = \frac{E^{eq}}{E} \leq 1$ . Les travaux de [Shanley, 1947, Hutchinson, 1973] ont montré que le module tangent défini par  $\dot{\sigma} = E_{tan} \dot{\epsilon}$  pouvait être pris comme module réduit  $E^{eq}$ . De nombreux chercheurs dont [Ilyushin, 1948]

et [Stowell, 1948] ont proposé des expressions du paramètre  $\eta$ . On conseillera les travaux de [Pride et Heimerl, 1949] qui proposent, entre autres, une synthèse des différentes expressions du rapport  $\eta$ .

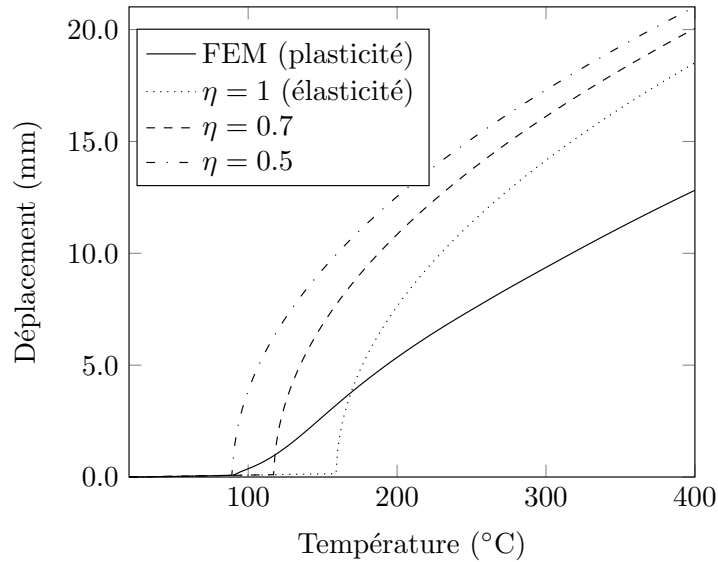
Dans le cas de l'équation (3.41), la solution  $W_{pf}$  est définie telle que  $W_{pf} = \sqrt{\zeta_2 \Delta T + \zeta_3}$ . Cette solution existe à condition que  $\zeta_2 \Delta T + \zeta_3 \geq 0$ . On définit alors la température critique de flambement  $T_{crit}$  comme :

$$\Delta T_{crit} = -\frac{\zeta_3}{\zeta_2} \quad (3.42)$$

Avec  $\zeta_2 \geq 0$  et  $\zeta_3 \leq 0$ . Nous montrerons en 3.1 que  $\Delta T_{crit}$  peut également se mettre sous la forme classique :

$$\Delta T_{crit} = \frac{\pi^2 k_{crit}}{32 \beta \varphi^2} \quad (3.43)$$

Dans laquelle on introduit la grandeur caractéristique  $k_{crit}$ , coefficient de criticité donné dans le cas SC par (3.51). En présence de plasticité, conformément à l'approche de la déformation J2, la température critique deviendrait  $\Delta T_{crit}^{corr} = -\eta \frac{\zeta_3}{\zeta_2}$ . La solution du déplacement au centre deviendrait donc  $W_{pf}^{corr} = \sqrt{\frac{\zeta_2}{\eta} \Delta T + \zeta_3}$ . Or la condition  $\eta \leq 1$  implique  $W_{pf}^{corr} \geq W_{pf}$  à une température donnée supérieure à la température critique. Si cette solution précipite le flambement, elle entraîne un accroissement des écarts entre solution analytique et résultat aux éléments finis par rapport au cas élastique (figure 3.14), ce qui n'est pas satisfaisant.



**FIGURE 3.14:** Plasticité par la méthode du module équivalent  $E^{eq} = \eta E$ ,  $\varphi = 30$

Dans ses travaux, [Stowell, 1948] établit une équation d'équilibre modifiée pour inclure la plasticité. Pour cela il introduit les quantités  $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2}$  et

$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xy}^2}$  reliées par  $\sigma_i = E_{\text{sec}} \varepsilon_i$  avec  $E_{\text{sec}}$  le module sécant. L'expression de la relation d'équilibre (3.19) devient dans ces conditions :

$$\left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_i}\right)^2 \left(1 - \frac{E_{\text{tan}}}{E_{\text{sec}}}\right)\right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 3 \frac{\sigma_{xx}\sigma_{xy}}{\sigma_i^2} \left(1 - \frac{E_{\text{tan}}}{E_{\text{sec}}}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2 \left[1 - \frac{3}{4} \frac{\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 2\sigma_{xy}^2}{\sigma_i^2} \left(1 - \frac{E_{\text{tan}}}{E_{\text{sec}}}\right)\right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 3 \frac{\sigma_{yy}\sigma_{xy}}{\sigma_i^2} \left(1 - \frac{E_{\text{tan}}}{E_{\text{sec}}}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_i}\right)^2 \left(1 - \frac{E_{\text{tan}}}{E_{\text{sec}}}\right)\right] \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_t}{D} \quad (3.44)$$

La présence des termes en  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  rend l'équation 3.44 lourde à résoudre analytiquement en grands déplacements lorsqu'on lui réinjecte (3.9b), (3.11) et (3.22). On optera donc pour une approche simplifiée afin d'introduire les effets de la plasticité dans le modèle et basée sur les observations de la partie 1.

### 2.3.3 Solution raccordée

La méthode que nous proposons pour intégrer la plasticité à notre modèle repose sur les notions de température seuil  $\Delta T_{\text{seuil}}$  et de poids de la plasticité.

Dans un premier temps, nous calculons les températures de plastification locale ( $\Delta T_y^{\text{lo}}$ ), pour laquelle la plaque est plastifiée localement à ses bords et globale ( $\Delta T_y^{\text{gl}}$ ) pour laquelle la totalité de la plaque est plastifiée.

L'expression de la température de plastification globale peut être obtenue à partir de la contrainte équivalente de von Mises écrite pour une plaque sollicitée thermiquement :  $\sigma_{\text{vMIS}}^{\text{eq}} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy}}$  dans laquelle on réinjecte les expressions (3.10). Pour le dernier point plastifié où  $\sigma_{\text{vMIS}}^{\text{eq}} = \sigma_y$ , il vient alors :

$$\Delta T_y^{\text{gl}} = \frac{(1 - \nu) \sigma_y}{E \beta} \quad (3.45)$$

Où  $\sigma_y$  est la limite d'élasticité de la tôle.

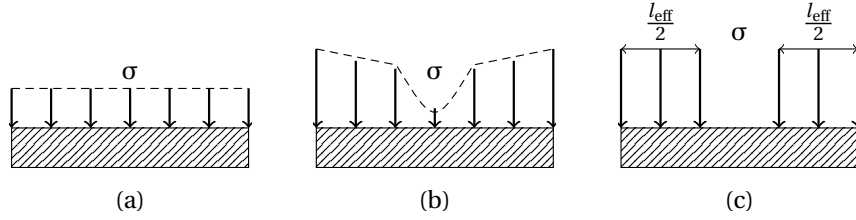
La température de plastification locale est obtenue à partir des hypothèses de von Kármán [Wierzbicki, 2006a] (figure 3.15) selon lesquelles la plasticité se localise dans des bandes de largeur  $\frac{l_{\text{eff}}}{2}$ , comme nous l'avons observé numériquement (figure 3.7b). Dans cet état,  $l_{\text{eff}}$  est déterminé à partir de la condition  $\frac{\sigma_{\text{crit}}}{\sigma_y} = 1$  ce qui conduit à  $l_{\text{eff}} = t_p \sqrt{\frac{\pi^2 k_{\text{crit}}}{32} \frac{E}{\sigma_y}}$  en réinjectant (3.43). L'effort à rupture s'écrit par la suite  $N_u = \sigma_y l_{\text{eff}} t_p$ . L'expression de la contrainte ultime  $\sigma_u = \frac{N_u}{s_y t_p}$  permet enfin d'obtenir la relation (3.46).

$$\Delta T_y^{\text{lo}} = \frac{1}{\beta \varphi} \sqrt{\frac{\pi^2 k_{\text{crit}}}{32} \frac{\sigma_y}{E}} \quad (3.46)$$

Lorsque les contraintes critiques sont voisines des contraintes de plastification, [Winter, 1947] a observé que l'équation (3.46) devenait non conservative à cause de l'influence des

imperfections réduisant la résistance de la plaque. Pour tenir compte de ce phénomène, le chercheur introduit le facteur ( $\frac{l_{\text{eff}}}{s_y} = 1 - \frac{0.25}{\varphi} \sqrt{\frac{\sigma_{\text{crit}}}{\sigma_y}}$ ) dans l'expression de von Kármán. L'équation (3.46) devient finalement (3.47)

$$\Delta T_y^{\text{lo}} = \frac{1}{\beta \varphi} \sqrt{\frac{\pi^2 k_{\text{crit}}}{32} \frac{\sigma_y}{E}} \left( 1 - \frac{0.25}{\varphi} \sqrt{\frac{\pi^2 k_{\text{crit}}}{32} \frac{E}{\sigma_y}} \right) \quad (3.47)$$



**FIGURE 3.15:** Localisation des contraintes en état pré-flambement (a), post-flambement (b), modèle de von Kármán (c), adapté de [Wierzbicki, 2006a]

La température de plastification sera enfin prise comme le minimum des températures de plastification locale et globale :

$$\Delta T_y = \min(\Delta T_y^{\text{lo}}, \Delta T_y^{\text{gl}}) \quad (3.48)$$

La connaissance du seuil de plastification donnée par (3.48) nous permet de concevoir une solution  $W_{rf}$  raccordant les régimes pré- et post-critique  $W_{af}$  et  $W_{pf}$ , définie lorsque  $\delta T_y \leq \Delta T \leq \Delta T_{\text{crit}}$ . En accord avec nos observations réalisées en 1.3, la solution raccordée peut être linéaire mais la transition de  $W_{rf}$  à  $W_{pf}$  doit s'opérer de façon continue.

Deux approches ont été étudiées : raccorder à travers une fonction linéaire ou une forme quadratique. La solution quadratique offrant de moins bons résultats que la solution linéaire pour un coût de calcul plus important, nous ne la présenterons pas ici, ses caractéristiques figurant en annexe D, 1.1.4. La solution de raccord linéaire consiste, pour assurer la continuité, à rechercher la tangente à la courbe  $W_{pf}$  sous condition  $W_{rf}(T_y) = W_{af}(T_y)$ . Il s'agit alors de chercher la température  $T_{rf}$  où s'effectue le raccord. Il vient :

$$W_{rf} = \frac{1}{2} \frac{\zeta_2 (\Delta T - \Delta T_{rf})}{\sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3}} + \sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3} \quad (3.49a)$$

$$\Delta T_{rf} = \frac{-2\zeta_3 - \zeta_2 \Delta T_y + 2\zeta_1 \Delta T_y \left( \zeta_1 \Delta T_y + \sqrt{\zeta_1^2 (\Delta T_y)^2 - \zeta_2 \Delta T_y - \zeta_3} \right)}{\zeta_2} \quad (3.49b)$$

Enfin, nous avons vu précédemment que la part de la plasticité représentait au minimum 20% de la réponse totale (figure 3.8). Afin de tenir compte de cette influence, nous

introduisons un coefficient pondérateur tel que :

$$\Delta T \leq \Delta T_y, \quad W = \max(W_{af}, W_{rf}, W_{pf}) \quad (3.50a)$$

$$\Delta T > \Delta T_y, \quad W = \frac{1}{1.2} \max(W_{af}, W_{rf}, W_{pf}) \quad (3.50b)$$

Ces nouveaux développements permettent au modèle analytique d'être conforme aux réponses obtenues avec les simulations numériques par éléments finis comme le souligne la figure 3.16.

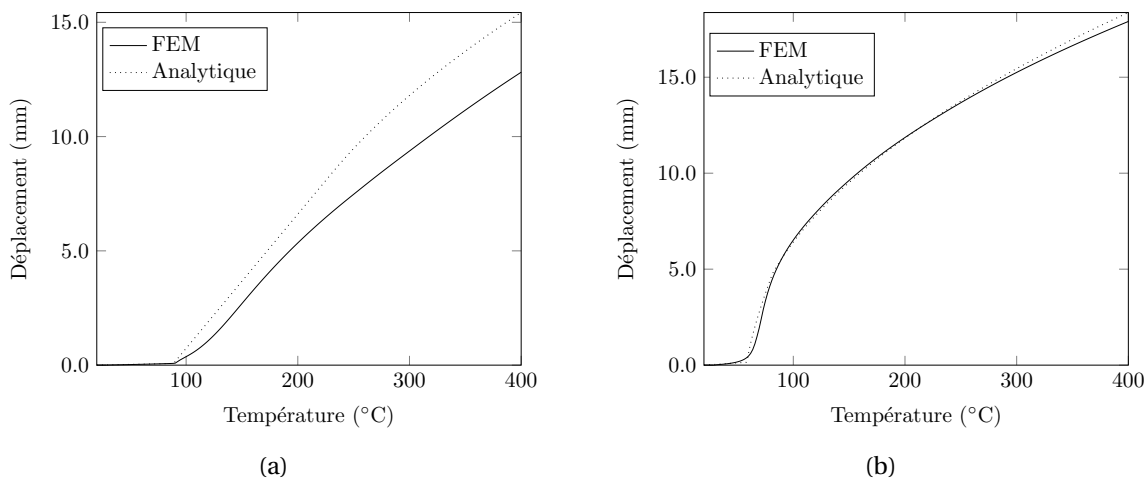


FIGURE 3.16: Solution analytique améliorée vs calcul éléments finis :  $\varphi = 30$  (a),  $\varphi = 80$  (b)

### 3 Méthode de vérification du voilement thermique

Dans cette dernière partie, nous revenons sur la solution analytique décrite dans le cas général par les équations (3.41a) à (3.41f). L'objectif de cette partie consiste à formuler des hypothèses simplificatrices, à valider les développements effectués en 2 puis à les retranscrire de façon simplifiée pour une utilisation lors des études de conception.

Un premier paragraphe sera dédié à l'analyse du modèle que nous avons développé. L'étude des modes de flambement et de l'influence des différents paramètres permet de formuler des hypothèses sécuritaires pour simplifier le problème d'instabilité.

Le second paragraphe est consacré aux aspects validations. Nous y confrontons les résultats issus de la simulation par éléments finis avec ceux calculés à partir du modèle analytique.

Enfin, le dernier paragraphe réalise la synthèse des résultats du chapitre III en formulant une méthodologie simple de vérification du voilement thermique local des éléments modulaires SCs.

### 3.1 Étude du coefficient de criticité

La solution en régime post-critique s'écrit  $\sqrt{\zeta_2 \Delta T + \zeta_3}$ . Nous avons donc défini la température critique par  $\Delta T_{\text{crit}} = -\frac{\zeta_3}{\zeta_2}$  (3.42). Cette dernière peut alors se mettre sous la forme  $\Delta T_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 k_{\text{crit}}}{32 \beta \varphi^2}$  ; où  $k_{\text{crit}}$  est le coefficient de criticité qui s'écrit dans sa forme la plus générale :

$$k_{\text{crit}} = -\frac{4(p^2 v n^2 \gamma^2 + m^2 v q^2 \gamma^2 + \gamma^4 q^2 n^2 + m^2 p^2) \xi^2}{\gamma^2 (v n^2 \gamma^2 + m^2 v + m^2 + n^2 \gamma^2)} + \frac{64 \varphi (\gamma^3 n^2 K_x + m^2 K_y + v n^2 K_y \gamma^2 + m^2 v K_x \gamma) F}{\gamma t_p \pi^2 K_y K_x (v n^2 \gamma^2 + m^2 v + m^2 + n^2 \gamma^2)} - \frac{8}{3} \frac{-\gamma^4 \omega_M n^4 - m^4 \omega_M - m^4 - \gamma^4 n^4 + m^4 v \omega_M + \gamma^4 v \omega_M n^4 - 2 m^2 \omega_M n^2 \gamma^2 + 2 m^2 v \omega_M n^2 \gamma^2 - 2 m^2 n^2 \gamma^2}{\gamma^2 (v n^2 \gamma^2 + m^2 v + m^2 + n^2 \gamma^2)} \quad (3.51)$$

Il est évident que le comportement en régime post-critique  $W_{pf} = \sqrt{\zeta_2} \sqrt{\Delta T - \Delta T_{\text{crit}}}$  est directement affecté par le comportement de  $\Delta T_{\text{crit}}$  ; et par extension de  $k_{\text{crit}}$ . En effet, une augmentation de  $k_{\text{crit}}$  provoque une diminution de  $W_{pf}$  et réciproquement, une baisse de  $k_{\text{crit}}$  se traduit par un accroissement de  $W_{pf}$ .

#### 3.1.1 Sensibilité de $k_{\text{crit}}$

Afin d'évaluer l'influence des différents paramètres sur le comportement du modèle analytique, nous étudions le comportement du coefficient de criticité  $k_{\text{crit}}$ . En effet, grâce à sa forme polynomiale, nous verrons que  $k_{\text{crit}}$  est monotone pour une variable donnée. Ainsi, la connaissance du signe de la dérivée partielle  $\frac{\partial k_{\text{crit}}}{\partial X}$  détermine l'influence de la variable  $X$  sur  $k_{\text{crit}}$  et  $W_{pf}$ .

**Défaut de forme  $\xi$  :** La première grandeur étudiée est l'amplitude de l'imperfection géométrique initiale rapportée à l'épaisseur de la tôle métallique. Il est évident que la quantité  $\frac{\partial k_{\text{crit}}}{\partial \xi} = -\frac{8(p^2 v n^2 \gamma^2 + m^2 v q^2 \gamma^2 + \gamma^4 q^2 n^2 + m^2 p^2) \xi}{\gamma^2 (v n^2 \gamma^2 + m^2 v + m^2 + n^2 \gamma^2)}$  est négative si  $\xi > 0$ . Un défaut de forme qui augmente est donc à l'origine d'une précipitation du voilement et d'une amplification de la déformée.

**Raideurs au bord  $K_x^S$  et  $K_y^S$  :** Le second paramètre considéré est la raideur au bord du domaine  $K_x^S$  (respectivement  $K_y^S$ ). Le calcul de la quantité dérivée  $\frac{\partial k_{\text{crit}}}{\partial K_x^S}$  conduit à  $\frac{64 \varphi (\gamma^3 n^2 + m^2 v \gamma) F}{\gamma t_p \pi^2 K_y^S K_x^S (v n^2 \gamma^2 + m^2 v + m^2 + n^2 \gamma^2)} - \frac{64 \varphi (\gamma^3 n^2 K_x^S + m^2 K_y^S + v n^2 K_y^S \gamma^2 + m^2 v K_x^S \gamma) F}{\gamma t_p \pi^2 K_y^S K_x^{S^2} (v n^2 \gamma^2 + m^2 v + m^2 + n^2 \gamma^2)}$ . Or  $\frac{(\gamma^3 n^2 + m^2 v \gamma) K_x^S}{\gamma^3 n^2 K_x^S + m^2 K_y^S + v n^2 K_y^S \gamma^2 + m^2 v K_x^S \gamma} < 1$  donc  $\frac{\partial k_{\text{crit}}}{\partial K_x^S} < 0$ . Un raisonnement similaire mène à un résultat identique pour  $K_y^S$ . Augmenter les raideurs contribue donc à diminuer la température critique et à amplifier la réponse post-critique. On pourra prendre comme hypothèses fortes :  $K_x^S \rightarrow \infty$  et  $K_y^S \rightarrow \infty$  qui sont des conditions très sécuritaires pour la conception.

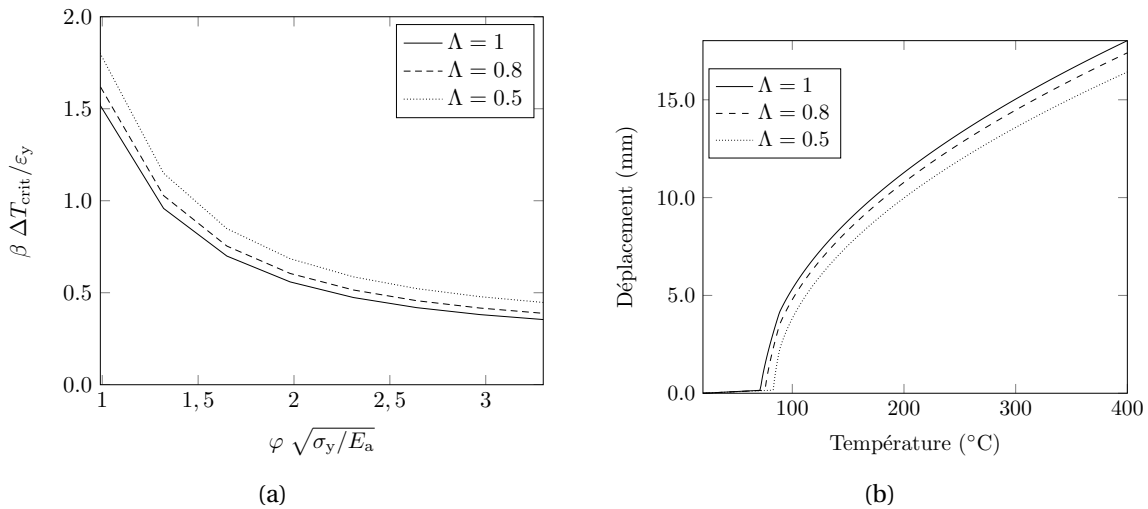
**Moment correctif  $\omega_M$  :** La grandeur  $\omega_M$  caractérise l'intensité du moment de correction injecté dans le modèle pour recalculer les conditions limites analytiques sur les conditions

limites numériques. Il vient  $\frac{\partial k_{\text{crit}}}{\partial \omega_M} = -\frac{2((m^4 + \gamma^4 n^4 + 2m^2 n^2 \gamma^2)\nu - \gamma^4 n^4 - m^4 - 2m^2 n^2 \gamma^2)}{\gamma^2((m^2 + n^2 \gamma^2)\nu + m^2 + n^2 \gamma^2)} > 0$  puisque  $0 < \nu < 1$ . Plus la correction apportée est importante, plus le flambement est retardé et  $W_{pf}$  diminue. On retrouve ici une tendance observée dans la figure D.8b qui montre que la réponse d'une plaque simplement appuyée corrigée converge vers la réponse d'une plaque encastree lorsque  $\omega_M$  augmente.

**Chargement mécanique :** En présence d'un chargement mécanique  $\varepsilon^{\text{imp}} \neq 0$  (table D.4), le comportement de  $k_{\text{crit}}$  est logiquement déterminé par le signe de  $\varepsilon^{\text{imp}}$  :  $\frac{\partial k_{\text{crit}}}{\partial \varepsilon_{xx}^{\text{imp}}} = \pm \frac{24\varphi^2(\nu n^2 \gamma^2 + m^2)}{\pi^2(\nu n^2 \gamma^2 + m^2 \nu + m^2 + n^2 \gamma^2)}$ . En présence d'une traction  $\varepsilon^{\text{imp}} > 0$ , le flambement est retardé tandis qu'une compression  $\varepsilon^{\text{imp}} < 0$  le précipite.

**Paramètre d'anisothermie  $\Lambda$  :** Dans le paragraphe 1.3.6 de l'annexe D, nous présentons l'expression de la solution en présence d'un chargement thermique complexe, variable en espace avec le mode de voilement. Ce chargement est caractérisé par le paramètre  $\Lambda$  défini en D.1.2.4.

La figure 3.17a illustre l'évolution du seuil en température critique en fonction de  $\Lambda$ . On observe que moins le chargement est homogène ( $\Lambda$  diminue), plus le flambement est retardé. et donc moins le déplacement est important (figure 3.17b). En effet, dans le cas anisotherme, plus  $\Lambda$  diminue et plus la température au bord est faible. L'effort thermique développé dans la plaque est alors également diminué. On réalise donc dans la suite l'hypothèse d'un chargement isotherme en  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  tel que  $\Lambda = 1$ .



**FIGURE 3.17:** Sensibilité au paramètre  $\Lambda$  :  $\Delta T_{\text{crit}}$  (a),  $W_{pf}(\varphi = 80)$  (b)

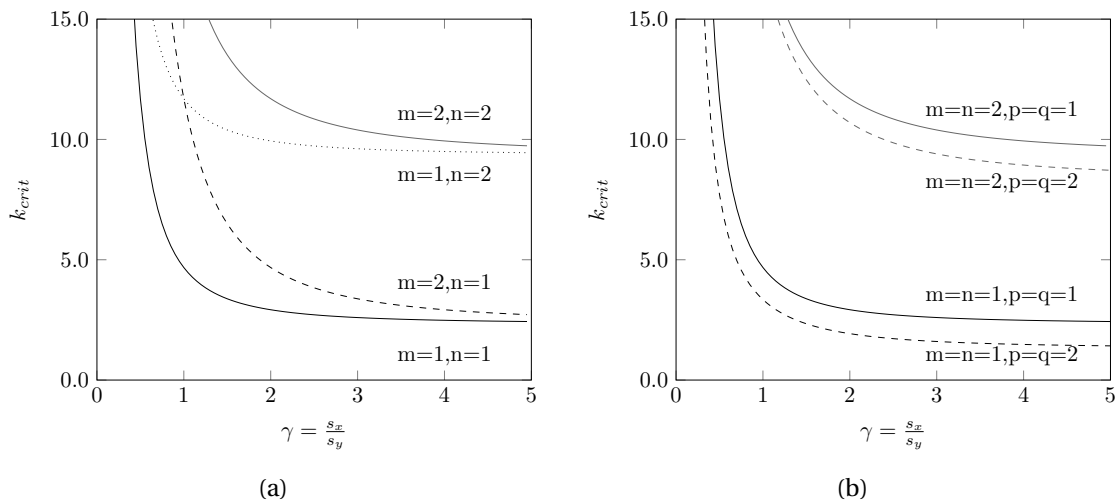
Les résultats de cette première étude du coefficient critique sont conformes aux observations réalisées dans l'étude de criblage au paragraphe 1.1 et confortent ainsi les hypothèses que nous avons présentées en 2.1.



### 3.1.2 Modes de voilement

Le mode de flambement est défini par les nombres  $m$  et  $n$  représentatifs du nombre de demi-ondes sur la plaque, dans chaque direction. Ainsi,  $m = n = 1$  correspond au premier mode de flambement et  $m = n = 2$  au second mode de flambement.

**Chargement thermique seul :** On trace, dans la figure 3.18a l'évolution du coefficient de criticité  $k_{crit}$  en fonction de  $\gamma = \frac{s_x}{s_y}$  l'élancement plan de la plaque. On observe que la courbe obtenue pour le premier mode n'intersecte jamais celles caractérisant les autres modes de voilement et qu'elle est enveloppe inférieure. On en déduit qu'en absence de chargement mécanique, le mode  $m = n = 1$  correspond au premier mode de la plaque chauffée, quelles que soient les caractéristiques géométriques de cette dernière .



**FIGURE 3.18:** Évolution de  $k_{crit}$  en fonction de  $\gamma$  (a), Influence du mode du défaut sur le mode de voilement (b)

On s'attend alors à ce que le mode de voilement global corresponde à un assemblage géométrique du premier mode local obtenu à l'échelle de la maille élémentaire, comme cela a été observé en annexe A, figure A.1. Par ailleurs, l'écart important entre les modes  $m = n = 1$  et  $m = n = 2$  pour un élancement  $\gamma$  donné suggère la nécessité d'un apport énergétique important pour que la transition du premier mode de flambement au second se produise (figure 3.18a). Enfin, la figure 3.18b montre qu'augmenter le mode du défaut diminue  $k_{crit}$ . Par conséquent, le voilement se produit plus tôt. Pour une valeur de  $\gamma$  donnée, il est remarquable que les valeurs des coefficients critiques des deux premiers modes subissent une transformation analogue selon les ordonnées. Imposer un défaut en mode 2 ne privilégie donc pas le second mode de flambement au premier mode.

On pourra donc par la suite faire l'hypothèse d'un voilement et d'un défaut pris en mode 1, tels que  $m = n = p = q = 1$ .

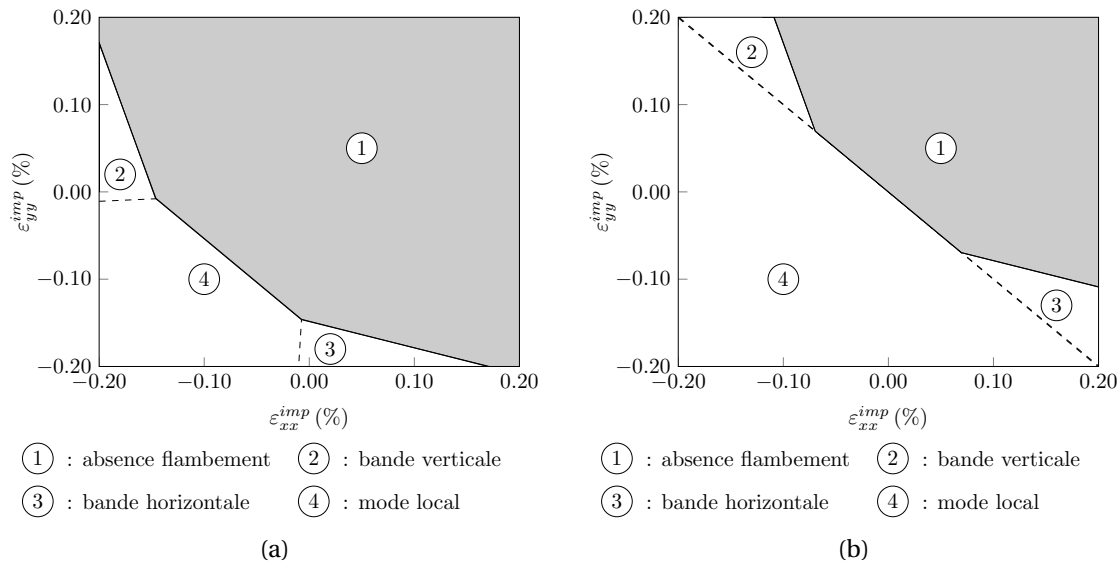
**Influence d'un chargement mécanique supplémentaire :** Les chercheurs [Mézière, 2004, Varma *et al.*, 2013b] ont observé dans leurs calculs numériques trois modes de voilement prépondérants en présence d'un chargement mécanique  $\varepsilon^{\text{imp}} \neq 0$ . À l'échelle de la structure le voilement est alors susceptible de se produire localement (maille carrée entre quatre connecteurs), par bandes verticales (portées par la direction  $\vec{y}$ ) ou bandes horizontales (portées par la direction  $\vec{x}$ ).

Les expressions des domaines de flambement par bandes sont obtenues à partir des formules de Sezawa :  $\sigma_{\text{crit}}^{\text{bh}} = \lim_{s_x \rightarrow \infty} \sigma_{\text{crit}}$  et  $\sigma_{\text{crit}}^{\text{bv}} = \lim_{s_y \rightarrow \infty} \sigma_{\text{crit}}$  [Sezawa, 1931]. La transposition de ces relations à la température critique donnée dans la table D.4 permet d'obtenir les expressions de  $\Delta T_{\text{crit}}^{\text{bh}}$  et  $\Delta T_{\text{crit}}^{\text{bv}}$  :

$$\Delta T_{\text{crit}}^{\text{bh}} = \frac{[2 - 3\xi^2 + 2(1 - \nu)\varpi_M] t_p^2 \pi^2 + 24 s_y^2 \varepsilon_{yy}^{\text{imp}} + 24 s_y^2 \nu \varepsilon_{xx}^{\text{imp}}}{24 s_y^2 \beta (\nu + 1)} \quad (3.52a)$$

$$\Delta T_{\text{crit}}^{\text{bv}} = \frac{[2 - 3\xi^2 + 2(1 - \nu)\varpi_M] t_p^2 \pi^2 + 24 s_x^2 \nu \varepsilon_{yy}^{\text{imp}} + 24 s_x^2 \varepsilon_{xx}^{\text{imp}}}{24 s_x^2 \beta (\nu + 1)} \quad (3.52b)$$

Les quantités  $\frac{\Delta T_{\text{crit}}}{\Delta T}$ ,  $\frac{\Delta T_{\text{crit}}^{\text{bh}}}{\Delta T}$  et  $\frac{\Delta T_{\text{crit}}^{\text{bv}}}{\Delta T}$  définissent un domaine fonction de  $\varepsilon_{xx}^{\text{imp}}$ ,  $\varepsilon_{yy}^{\text{imp}}$  et  $\Delta T_{\text{crit}}$ .



**FIGURE 3.19:** Modes de voilement théoriques pour un voile SC à  $T = T_{\text{ext}}$  (a),  $T = T_{\text{crit}}$  (b)

La figure 3.19 précise les différents modes de voilement théoriques pour une structure telle que  $s_x = s_y = 150\text{mm}$  et  $t_p = 5\text{mm}$ . Le mode local est calculé pour un carré de dimensions  $300\text{mm} \times 300\text{mm} \times 5\text{mm}$  correspondant à la présence d'un connecteur déficient dans la structure étudiée. Les domaines de flambement sont donnés pour la température ambiante (figure 3.19a) et lorsque la température critique est atteinte (figure 3.19b). L'augmentation

de la température se traduit par une translation du domaine de fonctionnement à l'avantage du mode local qui domine alors les autres modes. Cette remarque conforte l'hypothèse d'un voilement local en mode 1 en l'absence de chargement mécanique.

## 3.2 Comparaison des résultats analytiques et numériques

Ce paragraphe propose une validation du modèle analytique défini par les équations (3.41a) à (3.41f).

### 3.2.1 Domaine de fonctionnement des éléments SC

En considérant la méthode utilisée pour identifier le paramètre  $\varpi_M$  (voir annexe D, §1.4), il est évident que les domaines de voilement analytiques et numériques coïncident (figure D.10). La figure 3.20 présente la confrontation des différents domaines : flambement, plastification locale et plastification globale.

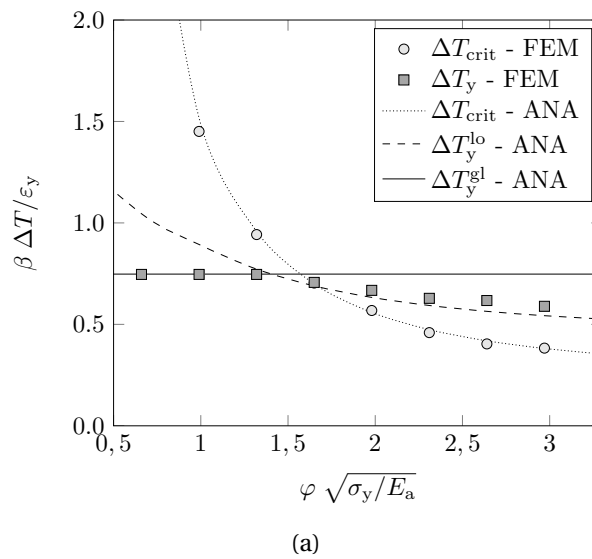


FIGURE 3.20: Domaines numériques de plastification et de voilement vs analytiques

On retrouve par l'application de la méthode de [Winter, 1947] une bonne correspondance entre les domaines plastiques locaux numériques et analytiques dont l'expression est donnée par (3.47). En présence de plaques élancées, la température de plastification locale est légèrement sous-évaluée ; ce qui va dans le sens de la sécurité. Il est rassurant de retrouver également le domaine de plastification globale par application de la formule (3.45).

On peut finalement déduire de la figure 3.20 un domaine de fonctionnement des éléments SCs au problème du cloquage thermique, tenant compte de la température, des paramètres géométriques et des propriétés matériaux (figure 3.21).

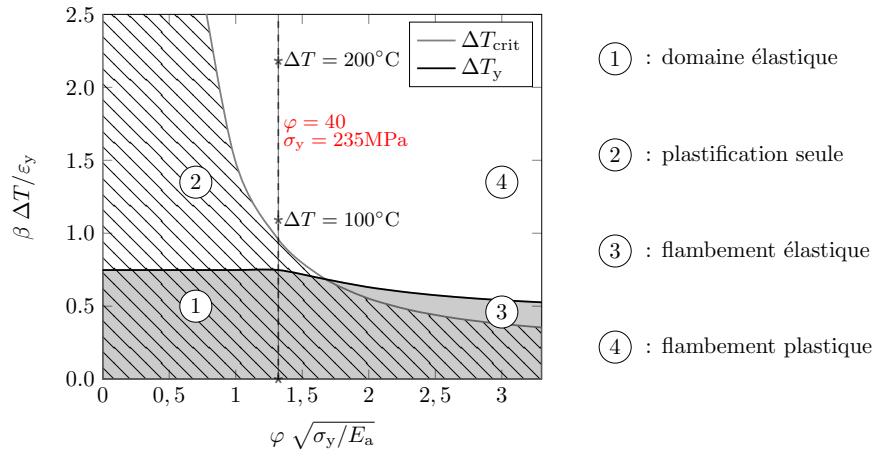


FIGURE 3.21: Domaine de fonctionnement des SCs au cloquage thermique

La valeur pratique  $\varphi = 40$  correspondant à la limite préconisée par [Narayanan *et al.*, 1994] figure sur le domaine 3.21. On observe que pour dès un écart de température de l'ordre de  $100^\circ C$ , le risque de voilement plastique est important.

### 3.2.2 Réponses en déplacement

Dans la suite, nous calculons l'écart relatif entre les résultats issus du modèle analytique et ceux obtenus par la méthode des éléments finis ( $\delta W = 1 - \frac{W_{ana}}{W_{fem}}$ ). Un écart négatif signifie que le déplacement post-critique calculé analytiquement majore le déplacement récupéré dans les modèles numériques, ce qui est sécuritaire pour une application normative. Ces écarts sont illustrés par la figure 3.22a.

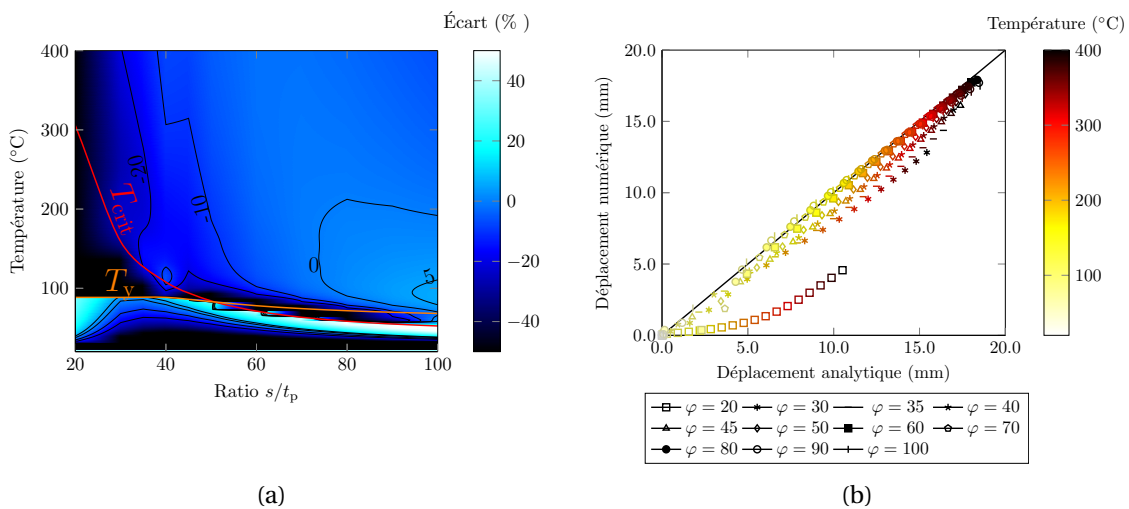


FIGURE 3.22: Confrontation solution analytique et numérique : écarts relatifs (a), absolus (b)

Trois zones se distinguent à la lecture de cette dernière. Premièrement, on note que pour des élancements tels que  $T_{\text{crit}} \leq T \leq T_y$  et en présence de températures faibles, le déplacement est fortement sous estimé par le modèle analytique (i). Cette zone correspond à la transition entre les modèles pré- et post-critique en cas de flambement élastique. Elle s'explique par l'incapacité du modèle analytique à représenter la transition *douce* qui s'opère entre les deux régimes de stabilité (figure 3.4b). Les déplacements sont cependant très faibles pour cette gamme de températures. Cette mauvaise représentativité du modèle analytique n'est alors pas préjudiciable à la sécurité du dimensionnement. Deuxièmement, on remarque sur la figure 3.22a la zone délimitée par  $20 \leq \varphi \leq 35$  dans laquelle le modèle analytique surestime très largement les résultats numérique (ii). Cette zone correspond aux plaques de très faibles élancements pour lesquelles on atteint la limite de validité du modèle. Ces plaques n'étant pas supposées flamber dans notre gamme de température, la notion de température critique sera privilégiée dans le dimensionnement par rapport à l'amplitude de déplacements calculée analytiquement. Troisièmement la zone déterminée par  $\varphi \geq 35$  et  $T > T_{\text{crit}}$  révèle des écarts faibles entre les deux approches ; notamment lorsque  $\varphi \geq 50$  l'écart est inférieur à 10% (iii). On observera que pour des plaques très élancées  $\varphi \geq 80$  et des températures modérées  $T \leq 210^\circ\text{C}$ , la solution analytique sous-estime légèrement les résultats numériques. L'écart étant néanmoins très faible ( $\leq 5\%$ ), la sécurité du dimensionnement ne sera pas affectée notablement.

La figure 3.22b donne un aperçu complémentaire à la figure 3.22a en faisant figurer l'ordre de grandeur des déplacements. On constate ainsi qu'en présence de déplacements importants, modèles analytique et numérique concordent. Pour des déplacements plus faibles les écarts sont plus marqués mais dans le sens de la sécurité. Les plaques très peu élancées  $\varphi = 20$  et  $\varphi = 30$  mettent en valeur les limites du modèle analytique à les représenter.

### 3.2.3 Imperfection géométrique initiale

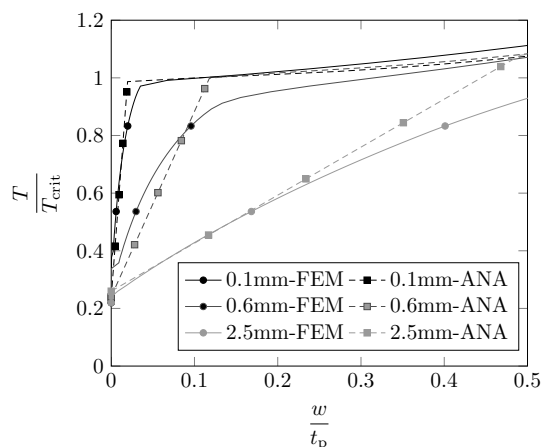


FIGURE 3.23: Confrontation solution analytique et numérique : amplification du défaut

Lorsque le défaut augmente et n'est pas négligeable, on observe que la réponse pré-critique analytique retranscrit correctement le phénomène d'amplification en flexion (figure 3.23) Par ailleurs ; l'influence du  $\tilde{W}$  est faible sur la température critique et l'intensité de la réponse. On retrouve ici les résultats de l'étude de criblage réalisée en 1.1. Ce dernier constat achève de valider la solution analytique vis à vis des références obtenues par simulations éléments finis.

### 3.3 Méthodologie de vérification destinée à l'ingénierie

Ce dernier paragraphe de la partie 3 réalise la synthèse des travaux présentés dans le chapitre III. Nous y exposons une méthode simple et conservatrice de pré-dimensionnement d'une structure SC au voilement local d'origine thermique.

#### 3.3.1 Méthode théorique

##### Hypothèses de calcul :

- Flambement en mode 1 :  $m = n = p = q = 1$
- Reprise parfaite de la dilatation thermique  $K_x^S \rightarrow \infty$  et  $K_y^S \rightarrow \infty$
- Espacement des connecteurs identiques dans les deux directions  $\gamma = 1$ .

##### Données nécessaires :

- $T$  : température de fonctionnement (180°C pour l'accident grave, 100°C pour l'accident BWA)
- $T_{\text{ext}}$  : température du milieu ambiant.
- $\beta$  : coefficient de dilatation thermique de l'acier  $\beta = 12 \cdot 10^{-6} \text{°C}^{-1}$
- $E$  : module d'Young de l'acier (210000MPa)
- $\nu$  : coefficient de Poisson (0.3)
- $\sigma_y$  : limite d'élasticité de l'acier (235MPa)
- $s$  : espacement entre connecteurs.
- $t_p$  : épaisseur de la plaque considérée.
- $\tilde{W}$  : défaut initial (en l'absence d'information prendre  $\tilde{W} = 0\text{m}$ )

##### Calcul des coefficients :

- Écart de température :  $\Delta T = (T - T_{\text{ext}})$
- Élancement :  $\varphi = s / t_p$ , défaut :  $\xi = \tilde{W} / t_p$
- Corrections :  $\omega_M = \left(\frac{\varphi}{58}\right)^2$
- $\zeta_1 = \frac{-6\xi\beta\varphi^2 t_p(1+\nu)}{\pi^2(\nu\omega_M - \omega_M - 1)}$
- $\zeta_2 = \frac{16\varphi^2 t_p^2 \beta(1+\nu)}{\pi^2(1+2\nu)}$
- $\zeta_3 = \frac{2 t_p^2(1+\nu)}{(1+2\nu)} \xi^2 + \frac{8}{3} \frac{t_p^2(\nu\omega_M - \omega_M - 1)}{(1+2\nu)}$

**Calcul des seuils :**

- Température critique :  $\Delta T_{\text{crit}} = -(\zeta_3 / \zeta_2)$
- Coefficient de criticité :  $k_{\text{crit}} = \frac{32 \beta \Delta T_{\text{crit}} \varphi^2}{\pi^2}$
- Température de plastification globale :  $\Delta T_y^{\text{gl}} = \frac{(1-\nu) \sigma_y}{E \beta}$
- Température de plastification locale :  $\Delta T_y^{\text{lo}} = \frac{1}{\beta \varphi} \sqrt{\frac{\pi^2 k_{\text{crit}}}{32} \frac{\sigma_y}{E}} \left( 1 - \frac{0.25}{\varphi} \sqrt{\frac{\pi^2 k_{\text{crit}}}{32} \frac{E}{\sigma_y}} \right)$
- Température plastification :  $\Delta T_y = \min(\Delta T_y^{\text{gl}}, \Delta T_y^{\text{lo}})$

**Vérification de l'élément :**

$T \leq \min(T_{\text{crit}}, T_y)$  : pas de risque de voilement.

$T_y < T \leq T_{\text{crit}}$  : pas de risque de voilement. On pourra cependant vérifier l'acceptabilité de l'amplitude de la déformée :

$$\begin{aligned} \text{— } \Delta T_{rf} &= \frac{-2\zeta_3 - \zeta_2 \Delta T_y + 2\zeta_1 \Delta T_y \left( \zeta_1 \Delta T_y + \sqrt{\zeta_1^2 (\Delta T_y)^2 - \zeta_2 \Delta T_y - \zeta_3} \right)}{\zeta_2} \\ \text{— } W &= \frac{1}{1.2} \left( \frac{1}{2} \frac{\zeta_2 (T - T_{rf})}{\sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3}} + \sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3} \right) \end{aligned}$$

$T > T_{\text{crit}}$  : risque de voilement. On calcule la déformée  $W = W^e = \sqrt{\zeta_2 (T - T_{\text{ext}}) + \zeta_3}$ . Si en plus,  $T > T_y$ , on prendra  $W = W^{\text{pl}} = \frac{1}{1.2} W^e$ .

Soit  $w_{\text{adm}}$  le critère en déplacement que l'on se fixe, si  $W \geq w_{\text{adm}}$  alors il est recommandé de diminuer  $\varphi$  en augmentant  $t_p$  ou réduisant  $s$ .

**Remarque :** La méthode proposée concerne une étape en amont de la conception d'une structure constituée d'éléments modulaires. Elle propose une solution de **pré-dimensionnement** basée sur des hypothèses fortes et sécuritaires (prévention du voilement au niveau local, bridage parfait de la dilatation thermique). Il est évident qu'en réalité la dilatation thermique ne sera pas parfaitement bridée (raideur finie des connecteurs ou au niveau des connexions voile-radier, voile-voile, voile-toiture). En dépit du conservatisme de la solution proposée, il sera nécessaire de procéder à des simulations numériques avec les éléments finis pour les étapes de contrôles et de validation de la conception ; en particulier en présence de géométries et chargements complexes ou de trémies.

Pour finir, des variantes à cette méthode sont possibles pour tenir compte de cas moins idéaux et plus proches de la réalité. On se référera alors aux tables D.1, D.2 où D.3 qui détaillent les expressions des coefficients dans des cas plus généraux.

**3.3.2 Exemple d'application**

Soit une structure SC de dimensions 1100mm × 700mm. On considère des connecteurs de type tirant régulièrement espacés de 200mm. L'épaisseur de la tôle est prise égale à 5mm, elle

est supposée parfaitement plane :  $\xi = 0$ <sup>4</sup>. L'élancement vaut donc  $\varphi = 40$ . On vérifie la tenue au voilement de la structure en cas d'accident grave :  $T = 180^\circ\text{C}$ . La température extérieure est prise égale à  $20^\circ\text{C}$ .

Les paramètres matériaux de l'acier sont respectivement pris égaux à  $E = 210000\text{MPa}$ ,  $\sigma_y = 235\text{MPa}$  et  $\nu = 0.3$ .

**Application de la méthode analytique :** On réalise l'hypothèse conservatrice de raideur infinie et de voilement en mode 1. On peut donc appliquer directement la méthode du paragraphe 3.3.1.

L'absence de défaut entraîne  $\zeta_1 = 0$ . Les calculs de  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$  donnent respectivement  $\zeta_2 = 0.63\text{mm}^2\text{C}^{-1}$  et  $\zeta_3 = -55.54\text{mm}^2$ . L'expression des températures seuils permet d'obtenir la température critique  $\Delta T_{\text{crit}} = 88.0^\circ\text{C}$  soit  $T_{\text{crit}} = 108.0^\circ\text{C}$ . On en déduit le coefficient critique de flambement  $k_{\text{crit}} = 5.47$ . On est en mesure d'obtenir alors les températures de plastification locale  $T_y^{\text{lo}} = 88.5^\circ\text{C}$  et globale  $T_y^{\text{gl}} = 85.3^\circ\text{C}$ .

À  $180^\circ\text{C}$ , le régime de fonctionnement attendu de la tôle mécanique est le voilement plastique. On peut alors déterminer l'amplitude du déplacement en appliquant la formule correspondant au régime voilement plastique :  $w = 6\text{mm}$ .

**Vérification par un calcul éléments finis :** Afin de vérifier l'analyse théorique de la structure présentée comme exemple, on réalise un calcul éléments finis la représentant.

La modélisation des connecteurs tirants est simplifiée à l'aide d'éléments barres à cette échelle. La taille des éléments de la plaque en acier est de 5mm dans les directions du plan. Les dimensions dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$  des éléments de la première couche de béton, placée en vis à vis de la plaque et par conséquent de l'élément cohésif d'interface, sont également de 5mm. Dans le reste du massif béton, les dimensions planes des éléments valent 20mm. Des relations cinématiques de Lagrange sont imposées à l'interface des deux volumes de béton ainsi définis pour assurer la continuité des déplacements entre les deux maillages incompatibles. Les déplacements plans sont imposés nuls aux bords de la structure.

Une imperfection géométrique initiale est introduite au sein de chacune des mailles élémentaires conformément au mode de voilement local de cette dernière. L'amplitude du défaut est variable selon les mailles choisies aléatoirement à la façon d'un bruit blanc, à l'exception de la maille centrale où elle atteint sa valeur maximale de 0.15mm.

Les résultats montrent que le flambement se produit localement au centre de l'élément, à l'endroit où l'imperfection géométrique est la plus forte (figure 3.24a). Il se propage ensuite aux mailles adjacentes et se concentre en une bande dont la direction est déterminée par le nombre de connecteurs. Dans l'exemple de la figure 3.24, les mailles centrales sont soumises à un effort plus important dans la direction  $\vec{x}$  que dans la direction  $\vec{y}$  puisque moins de connecteurs participent à la reprise de l'effort induit par la thermique. Il en résulte une propagation du voilement dans une bande verticale 3.24b.

4. L'approche est ici simplifiée, dans la réalité les tôles issues de laminage présentent généralement des défauts auxquels s'ajouteront les imperfections causées par les soudures et la mise en œuvre du béton lors de la construction.



Le tracé de l'évolution du déplacement maximal au centre de la zone voilée de la structure montre dans la figure 3.25 que le flambement se produit avant la température théorique calculée est avec une amplitude plus importante.

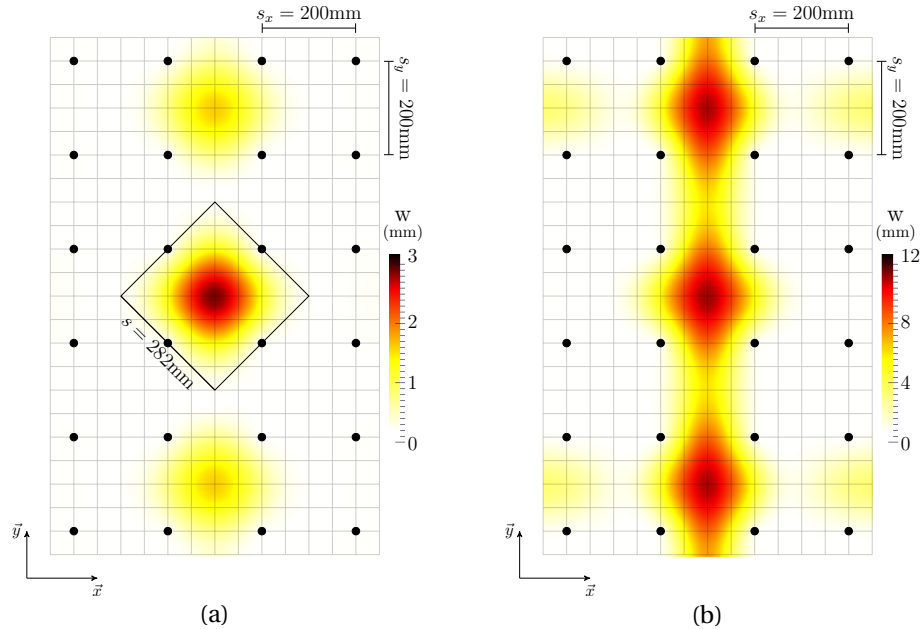


FIGURE 3.24: Champ de déplacements du voile exemple : à 92°C (a), 180°C (b)

L'analyse du champ de déplacement visible dans la figure 3.24a signale que la zone voilée localement est en réalité un carré de dimension  $l = s\sqrt{2}$ , correspondant à la diagonale entre la zone formée par quatre connecteurs. L'élancement à considérer dans la méthode analytique vaut alors  $\varphi = 280/5 = 56$ . On observe alors une bien meilleure correspondance entre les approches éléments finis et analytiques, même au niveau global (figure 3.25).

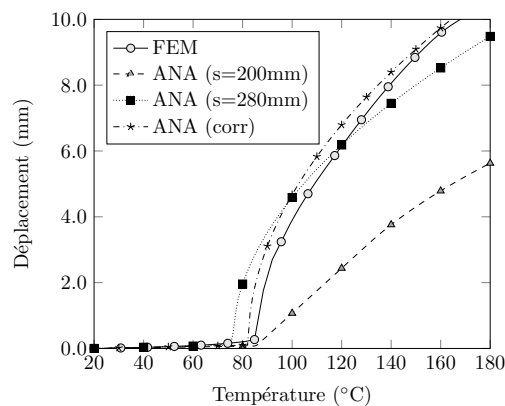


FIGURE 3.25: Évolution du déplacement hors-plan au centre du voile exemple

Lors de la vérification d'une structure SC, il conviendra donc de choisir la maille élémentaire s'appuyant sur la diagonale des connecteurs, de dimension  $s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$ . toutefois, le changement de situation implique certaines modifications des conditions limites à l'origine des écarts entre les réponses tracées figure 3.25. On pourra notamment projeter les efforts dans la diagonale ce qui se traduira par une majoration de la température d'un facteur  $\sqrt{2}$  et il sera nécessaire de recalculer le coefficient  $\omega_M$  pour correspondre aux nouvelles conditions limites (ANA (corr) figure 3.25).

## Conclusion partielle

Ce chapitre a présenté la réflexion qui a abouti à la proposition d'une méthodologie de vérification des éléments SCs pour la problématique du voilement local thermique. En se basant sur la méthode des éléments finis et le modèle élaboré au chapitre II, nous avons mené une étude de criblage à partir de laquelle nous avons extrait les quantités d'intérêt dans la réponse au voilement des éléments modulaires.

Nous avons ainsi pu montrer que le moment thermique pouvait être négligé, tout comme les transferts thermiques à l'interface. Seuls l'élancement  $\varphi$ , les conditions limites et la température participent de façon déterminante à la réponse post-critique.

Une analyse de sensibilité a conforté ces observations, tout en précisant l'influence du défaut de forme initial et du couplage flambement-plastification. Il est ainsi apparu, en présence d'un défaut important, une augmentation du déplacement hors-plan en régime pré-critique traduisant une amplification en flexion de l'imperfection géométrique.

De l'étude de la plasticité, nous avons appris deux éléments essentiels. En régime post-critique, en présence d'un matériau plastique, le déplacement est réduit par rapport au cas élastique (i). Nous avons pu établir en calculant le déplacement résiduel que la réponse plastique représentait environ 20% de la réponse totale. Ensuite, en régime pré-critique, la formation de rotules plastiques au bord est à l'origine d'une amplification de la déformée en flexion (ii). Ce phénomène se manifeste par une augmentation linéaire non négligeable de la déformée.

Suite à ces conclusions, nous avons élaboré un modèle analytique obtenu en résolvant l'équation générale du flambement à l'aide de la méthode de Galerkin. La relation d'équilibre a été écrite en transposant le problème de von Kármán-Föppl au cas des plaques thermoélastiques imparfaitement bridées.

La solution analytique ainsi développée a alors permis de retrouver correctement les résultats des calculs éléments finis pour le cas simple de la maille élémentaire SC parfaitement bridée en déplacement.

Nous avons finalement, proposé une méthodologie simplifiée afin d'étudier une structure SC au voilement local. Adaptée à l'ingénierie grâce à des hypothèses fortes mais conservatives, la méthode suggérée propose de déterminer l'élancement  $\varphi$  afin de prévenir le voilement thermique ou de le rendre acceptable. Cette méthode a été mise en application sur un cas exemple à travers lequel nous avons montré que la dimension à privilégier dans la méthode de vérification au voilement local pour une étude structurelle est la diagonale

d'une maille élémentaire, soit  $s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$ .

Nous conforterons cette approche à l'aide des résultats expérimentaux détaillés dans le chapitre IV.

## Chapitre IV

# Vérification expérimentale du critère de voilement local

*Dans ce chapitre on réalise une campagne expérimentale de caractérisation du voilement thermique. Un protocole original est élaboré pour obtenir la réponse post-critique. Cette dernière est ensuite confrontée aux modèles analytiques et numériques.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Étude dimensionnelle du voilement thermique . . . . .</b>	<b>138</b>
1.1	Fondements de l'analyse dimensionnelle . . . . .	138
1.2	Adimensionnement des équations de la modélisation . . . . .	141
1.3	Analyse des distorsions . . . . .	146
<b>2</b>	<b>Conception de la campagne expérimentale locale . . . . .</b>	<b>150</b>
2.1	Conception du support expérimental . . . . .	151
2.2	Systèmes d'acquisition . . . . .	157
2.3	Système de chauffage . . . . .	162
2.4	Synthèse . . . . .	164
<b>3</b>	<b>Réalisation de la campagne expérimentale . . . . .</b>	<b>166</b>
3.1	Observations et interprétations des mesures . . . . .	167
3.2	Confrontation numérique-analytique-expérimentale . . . . .	178
3.3	Perspectives d'amélioration . . . . .	182

---

## Introduction

Le dernier chapitre du présent travail de thèse est consacré à la conception et réalisation d'une caractérisation expérimentale du voilement thermique des structures SCs.

Cette campagne expérimentale très locale se réduit à l'étude d'une maille élémentaire de structure modulaire. Elle fait écho au faible nombre d'essais déjà réalisés à l'échelle de la structure [Sekimoto et Kondo, 2001, Müller, 2013] dont on souhaite enrichir la base de données. La simplification du problème à la maille élémentaire permet de tester plusieurs élançements dans des conditions identiques et réduit la complexité du système pour retrouver une réponse proche de la théorie développée au chapitre III. Dans une optique de validation, on veille à reproduire au mieux des conditions limites correspondant aux modèles numérique et analytique (simplifié pour l'ingénieur).

Afin de concevoir les spécimens testés, nous présentons dans la première partie de ce chapitre les conclusions d'une analyse dimensionnelle du problème thermo-mécanique des structures modulaires. On en vérifiera notamment les conséquences au sens de la température critique et du régime post-critique.

La seconde partie du chapitre est dédiée à la conception de l'essai. En effet la nature de la campagne expérimentale proposée requiert la conception d'un support original, capable de reprendre des efforts importants tout en bridant de faibles déplacements. On détaille à cette occasion les systèmes d'acquisition et de chauffage.

La dernière partie synthétise finalement les observations réalisées au cours des essais et leurs interprétations. Les résultats des essais sont alors examinés à l'aune de leur reproductibilité par les modèles numérique et analytique.

## 1 Étude dimensionnelle du voilement thermique

Dans les expériences et calculs réalisés en physique, et en particulier en mécanique, il est nécessaire de tenir compte de différents facteurs relevant de la similitude et des dimensions des grandeurs étudiées.

La réalisation de structures complexes est à l'origine de vastes recherches dans lesquelles les essais tiennent un rôle important. L'analyse dimensionnelle est une méthode basée sur l'invariance des lois mathématiques de la physique par rapport aux choix du système d'unités. Elle permet de dégager des paramètres caractéristiques et de réaliser des études qualitatives pour identifier les critères qui s'imposent dans les essais et les modèles.

Nous commencerons par présenter les fondements de la méthode d'analyse dimensionnelle. Nous l'appliquerons ensuite au problème thermo-mécanique que nous avons construit au chapitre II. Pour finir, nous analyserons les distorsions sur les variables, conséquences d'un changement d'échelle.

### 1.1 Fondements de l'analyse dimensionnelle

L'étude des phénomènes mécaniques consiste à rechercher des fonctions caractéristiques du phénomène étudié, dans lesquelles interviennent des grandeurs définies par leurs

valeurs numériques (vitesse, contrainte).

Certains problèmes mécaniques sont trop complexes pour être formulés ou décrits par des équations différentielles dont on peut calculer les solutions exactes (calculs de raideurs, de déformations). Dans ce cas, les études expérimentales sont privilégiées, à partir desquelles les faits empiriques fondamentaux sont déduits et formulés mathématiquement.

L'analyse dimensionnelle est une théorie facilitant la réalisation d'un protocole expérimental afin d'exploiter complètement les résultats issus de l'essai. En effet, elle permet de traduire les effets principaux d'un phénomène complexe à l'aide d'une quantité réduite de variables sans dimension [Buckingham, 1914].

### 1.1.1 Notions de grandeur adimensionnée

On distingue deux catégories de grandeurs physiques. Celles dont les valeurs dépendent de l'échelle et donc du système de mesure sont nommées *grandeurs dimensionnées* (longueur, temps). Au contraire, lorsque la valeur est indépendante du système d'unités, la variable est dite *adimensionnée* (angle, rapport de distance). La notion d'adimensionnement dépend des conventions définies. Ainsi, une grandeur dimensionnée peut être considérée adimensionnée lorsque sa valeur est fixée dans tous les systèmes d'unités. Par exemple, un angle peut être considéré dimensionné si on considère qu'il peut s'exprimer en radian ou degré dans des systèmes de mesure différents. Si, au contraire, quel que soit le système d'unités considéré, on exploite l'invariance géométrique de l'angle de telle sorte que sa mesure soit toujours exprimée en gradient, la grandeur devient une quantité adimensionnée.

### 1.1.2 Mesures de base et dérivée

Les grandeurs physiques sont liées entre elles par des relations déterminées. L'ensemble des grandeurs physiques à partir desquelles toutes les grandeurs étudiées peuvent être construites est appelé ensemble des *grandeurs fondamentales*. Le système d'unité des grandeurs fondamentales constitue ainsi le système de base de la mesure. On parlera de *mesure de base*. En pratique, en physique, on considère trois grandeurs fondamentales : masse (M), longueur (L) et temps (T). Dans nos travaux, il est également nécessaire d'introduire la température (K).

Les unités des grandeurs n'appartenant pas à l'ensemble des grandeurs fondamentales, mais obtenues à partir de compositions de ces dernières, constituent le système de *mesure dérivée*. L'expression d'une mesure dérivée au moyen des unités de base correspond à sa *dimension*. Notons  $[x]$  la dimension de la grandeur  $x$  selon la convention fixée par Maxwell. Dans son ouvrage [Sédov, 1972] démontre que dans le système S.I. les formules de dimension de toutes les grandeurs ont la forme d'un monôme de puissance (4.1), conséquence de la condition physique selon laquelle le rapport de deux valeurs numériques d'une variable dérivée ne dépend pas du choix du système de base.

$$[x] = L^l M^m T^t \quad (4.1)$$

Le choix d'un système d'unités basé sur les constantes physiques adéquates permet de réduire le nombre d'unités de base. Par exemple, si on considère la constante de la gravita-

tion universelle  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{m}^3/(\text{kg s}^2)$  comme constante adimensionnée absolue, la dimension de la masse devient fixée en fonction de la longueur et du temps :  $[m] = M = L^3 T^{-2}$ .

A l'aide des constantes universelles (gravitation, célérité de la lumière), il serait possible d'aboutir à un système de base unique mais difficile à exploiter lorsque ces constantes ne jouent aucun rôle dans le phénomène étudié [Sédov, 1972]. Il est plus commode de choisir comme unités fondamentales celles correspondant aux grandeurs physiques décrivant les phénomènes étudiés.

### 1.1.3 Théorème de Vashy-Buckingham

Les lois de la physique établies mathématiquement ou déduites empiriquement sont représentées par des relations fonctionnelles entre les grandeurs caractérisant le phénomène. Si les valeurs des grandeurs dépendent du système de mesure, ce n'est pas le cas des relations fonctionnelles qui, pour caractériser un phénomène, doivent posséder une structure particulière [Sédov, 1972]. Soit un paramètre dimensionné  $x$  fonction des grandeurs dimensionnées indépendantes  $x_1, \dots, x_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

$$x = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.2)$$

Où  $f$  est une fonction dont l'expression n'est pas nécessairement explicitée.

Soient  $x_1, \dots, x_k$  les  $k \leq n$  premières grandeurs de  $[x_1, \dots, x_n]$  dont les dimensions sont indépendantes et pouvant alors se rapporter à des unités fondamentales. On pose  $[x_1] = X_1$ ,  $[x_2] = X_2, \dots, [x_k] = X_k$ . L'application de (4.1) permet d'établir :

$$\begin{aligned} x &= \pi_{i=1}^k X_i^{m_i} \\ x_{k+1} &= \pi_{i=1}^k X_i^{p_i} \\ &\vdots \\ x_n &= \pi_{i=1}^k X_i^{q_i} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Faire respectivement varier  $x_i$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$  de  $\alpha_i$  tel que  $x'_i = \alpha_i x_i$  dans (4.3) conduit aux relations  $x' = (\pi_{i=1}^k \alpha_i^{m_i}) x$ ,  $x'_{k+1} = (\pi_{i=1}^k \alpha_i^{p_i}) x_{k+1}, \dots, x'_n = (\pi_{i=1}^k \alpha_i^{q_i}) x_n$ . Si bien que dans le nouveau système d'unités, la relation fonctionnelle (4.2) s'écrit  $x' = f(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_k x_k, (\pi_{i=1}^k \alpha_i^{p_i}) x_{k+1}, \dots, (\pi_{i=1}^k \alpha_i^{q_i}) x_n)$ . Les échelles  $\alpha_i$  étant arbitraires, la relation précédente est notamment vraie en posant  $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket \alpha_i = \frac{1}{x_i}$ . On peut finalement écrire :

$$\pi = f(\pi_1, \dots, \pi_{n-k}) \quad (4.4a)$$

$$\pi = \frac{x_1}{x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}}, \pi_1 = \frac{x_1}{x_1^{p_1} \dots x_k^{p_k}}, \dots, \pi_{n-k} = \frac{x_1}{x_1^{q_1} \dots x_k^{q_k}} \quad (4.4b)$$

Les grandeurs  $\pi_j$ ,  $j \in \llbracket 1, n - k \rrbracket$  sont indépendantes du système unitaire et sont donc des grandeurs adimensionnées.

Ainsi, soit une relation physique faisant intervenir  $n$  variables indépendantes dont  $k$  sont fondamentales, alors, il existe une équation mettant en jeu  $n - k$  variables adimensionnées

construites à partir des variables originelles. Ce théorème connu sous le nom de théorème de Vashy-Buckingham constitue le fondement de l'analyse dimensionnelle et de l'étude des similitudes [Buckingham, 1914].

#### 1.1.4 Application des similitudes en mécanique

Considérons un phénomène réel écrit en termes de variables adimensionnées :

$$\pi = f(\pi_1, \dots, \pi_n) \quad (4.5)$$

Une expérience est réalisée afin de caractériser le phénomène réel. La transposition de ce dernier dans l'expérimentation s'écrit :

$$\pi_{\text{exp}} = f_{\text{exp}}(\pi_{1\text{exp}}, \dots, \pi_{n\text{exp}}) \quad (4.6)$$

L'expérience ne reproduit la physique attendue qu'à condition que  $f \equiv f_{\text{exp}}$  ce qui, par invariance de l'essence du phénomène physique dans le système de mesure se traduit par la condition suivante :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \pi_i = \pi_{i\text{exp}} \Rightarrow \pi = \pi_{\text{exp}} \quad (4.7)$$

En réalité, il est ardu de satisfaire à la condition (4.7) à cause des limitations des matériaux qui, après changement d'échelle, conservent leurs propriétés. Des distorsions sont alors susceptibles d'apparaître sur certaines variables sans dimension, telles que  $\pi_{p\text{exp}} = \alpha_p \pi_p$ ,  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Par conséquent il vient  $\pi = \delta_{\text{exp}} \pi_{\text{exp}}$  où  $\delta_{\text{exp}}$  est le facteur de prédiction à déterminer.

Dans ses travaux [Murphy, 1972] présente plusieurs méthodes permettant de déterminer le facteur  $\delta_{\text{exp}}$ . La première méthode, analytique, nécessite la connaissance de la relation fonctionnelle  $f$ . Il vient alors naturellement  $\delta_{\text{exp}} = \frac{f(\pi_1, \dots, \pi_n)}{f(\pi_{1\text{exp}}, \dots, \pi_{n\text{exp}})}$ . Lorsque l'expression de  $f$  est implicite mais qu'il est possible de procéder à la séparation des variables, il reste envisageable de déterminer  $\delta_{\text{exp}}$  par la méthode analytique.

Une seconde méthode consiste à réaliser un modèle supplémentaire :  $\pi_{\text{mod}} = f_{\text{mod}}(\pi_{1\text{mod}}, \dots, \pi_{n\text{mod}})$  tel que les transformations entre  $\pi_{\text{mod}}$  et  $\pi_{\text{exp}}$  soient identiques à celles réalisées entre  $\pi_{\text{exp}}$  et  $\pi$ . Il vient alors :

$$\begin{aligned} \pi &= f(\pi_1, \dots, \pi_p, \dots, \pi_n) \\ \pi_{\text{exp}} &= f(\pi_1, \dots, \alpha_p \pi_p, \dots, \pi_n) \\ \pi_{\text{mod}} &= f(\pi_1, \dots, \alpha_p \pi_{p\text{exp}}, \dots, \pi_n) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \delta_{\text{exp}} = \frac{\pi}{\pi_{\text{exp}}} = \frac{\pi_{\text{exp}}}{\pi_{\text{mod}}} = \delta_{\text{mod}} \quad (4.8)$$

Où  $\delta_{\text{mod}}$  est calculable à partir des deux résultats expérimentaux. Il est alors possible de déduire la réponse réelle de l'expérience malgré les distorsions induites.

## 1.2 Adimensionnement des équations de la modélisation

Dans ce paragraphe, nous cherchons les variables adimensionnées relatives au système couplé thermo-mécanique que nous avons élaboré au chapitre II. Afin de satisfaire cet objectif, une analyse dimensionnelle est réalisée sur chacun des sous-systèmes thermique et mécanique du couplage.



### 1.2.1 Identification des grandeurs dimensionnées

La première étape consiste à identifier les grandeurs dimensionnées intervenant dans chacun des sous-systèmes. Les équations d'équilibre, conditions limites et lois de comportement permettent de recenser les paramètres nécessaires.

**Paramètres géométriques :** La géométrie de la structure, pour être parfaitement déterminée, requiert les paramètres géométriques donnés dans la table 4.1.

**TABLE 4.1:** Paramètres dimensionnés géométriques

Symbole	Description	Unité
$t_p$ :	épaisseur plaque	m
$t_b$ :	épaisseur béton	m
$s_x$ :	espacement longitudinal des tirants	m
$s_y$ :	espacement transversal des tirants	m
$l_x$ :	dimension longitudinale	m
$l_y$ :	dimension transversale	m
$\emptyset_g$ :	diamètre des tirants	m

**Sous-système thermique :** On distingue dans le sous-système thermique le phénomène conductif décrit par l'équation d'équilibre thermique (2.24) , les conditions limites convectives (2.30) et les conditions limites radiatives (2.25).

L'équation de la chaleur (2.28) indique qu'il est nécessaire d'introduire la variable sans dimension  $\theta = \frac{T - T_{\text{ext}}}{T_c - T_{\text{ext}}}$  pour caractériser la conduction thermique. Dans la suite, on notera l'écart entre les températures maximale imposée et extérieure  $\Delta T_c = T_c - T_{\text{ext}}$ . Par ailleurs, on distingue les paramètres relatifs aux matériaux acier ( $\square_a$ ), béton ( $\square_b$ ) et air ( $\square_{\text{air}}$ ).

Les échanges convectifs avec le milieu ambiant sont susceptibles de se produire au niveau des parois de la structure (figure 2.16). On considère alors des échanges béton-air extérieur et plaque-air extérieur caractérisés par le coefficient d'échange  $h_{\text{ext}}$  et la variable  $\theta$ . On tient également compte des échanges convectifs présents au sein de la lame d'air dont le coefficient d'échange est  $h_{\text{ipb}}$  et qui sont modélisés par l'équation (2.24).

Enfin, des échanges thermiques radiatifs se produisent entre la tôle métallique et le béton en cas de voilement local. On introduit les températures sans dimensions pour la plaque d'acier  $\theta_a$  et le béton  $\theta_b$ . On définit également  $\theta_0 = -\frac{T_{\text{ext}}}{\Delta T_c}$ . D'après l'équation (2.25), le flux thermique rayonnant est proportionnel au terme  $(T_a^4 - T_b^4) = \Delta T_c^4 [(\theta_a - \theta_0)^4 - (\theta_b - \theta_0)^4]$ . On introduit donc le paramètre  $\Delta T_c$  dans l'expression du flux correspondant aux transferts radiatifs.

La table 4.2 synthétise l'ensemble des paramètres dimensionnés nécessaires à la description du sous-système thermique.

TABLE 4.2: Paramètres dimensionnés - sous-système thermique

Symbole	Description	Unité
$\lambda_a, \lambda_b, \lambda_{\text{air}}$	conductivités thermiques	W/(m K)
$C_{p_a}, C_{p_b}, C_{p_{\text{air}}}$	chaleurs spécifiques	J/(kg K)
$\rho_a, \rho_b, \rho_{\text{air}}$	masses volumiques	kg/m <sup>3</sup>
$t_p, t_b, t_{\text{air}}$	épaisseurs	m
$\tau$	temps dynamique	s
$h_{\text{exp}}, h_{\text{ipb}}$	coefficients d'échanges convectifs	W/(m <sup>2</sup> K)
$\Delta T_c$	écart maximal de température	°C
$\epsilon^{\text{tot}} \sigma_0$	produit de l'émissivité totale par la constante de Boltzmann	W/(m <sup>2</sup> K <sup>4</sup> )

**Sous-système mécanique :** Les paramètres caractérisant le sous-système mécanique interviennent dans l'équation cinématique, l'équation d'équilibre, les lois de comportement et les conditions limites. Ces paramètres peuvent porter sur les éléments plaques ( $\square_p$ ), béton ( $\square_b$ ) et tirants ( $\square_g$ ). L'effet de la température sur le système mécanique se manifeste par la dilatation thermique de l'élément sous l'effet de son échauffement.

L'écriture de l'équation cinématique (3.9a) et des conditions limites de Dirichlet amène à considérer naturellement les variables adimensionnées des déformations  $\varepsilon$ , formées à partir du rapport des grandeurs dimensionnées de déplacements ( $u_x, u_y, u_z$ ) par une longueur ( $l_x, l_y, l_p \dots$ ).

L'équilibre dans le cas du voilement thermique peut être considéré comme un équilibre statique, si bien que l'équation (2.36) devient  $\nabla \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{g}} = \underline{\underline{0}}$  où  $\underline{\underline{g}}$  est l'accélération due à la pesanteur.

Ensuite, les relations de comportement ont été présentées au chapitre II, §2.1.1 pour le matériau acier et §2.2.1 dans le cas du béton. L'acier étant modélisé par un comportement élasto-plastique avec écrouissage isotrope, il est nécessaire de tenir compte, pour la partie élastique, du module d'Young  $E_a$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ , ce dernier étant adimensionné. La plasticité nécessite de considérer la limite d'élasticité  $\sigma_y$  ainsi qu'une variable d'écrouissage isotrope adimensionnée que l'on définit par  $\tilde{R}(p) = \frac{R(p) - \sigma_y}{\sigma_u - \sigma_y}$  où  $\sigma_u$  est la contrainte ultime à rupture. Le béton, supposé élastique avec prise en compte de l'endommagement est entièrement décrit par les grandeurs de l'élasticité  $E_b$ ,  $\nu$  et la variable adimensionnée d'endommagement  $D$ .

Pour finir, au niveau des interfaces, deux phénomènes sont considérés : la rupture fragile en traction exprimée par la relation (2.21) et le cas frottant décrit par l'équation (2.22). La définition d'une contrainte d'adhérence  $\sigma_{\text{adh}}$  et des seuils d'endommagement écrits en déplacements normal et tangent ( $\kappa_n, \kappa_t$ ) sont introduits pour la modélisation de la rupture fragile et du frottement. La loi de comportement de l'interface est par la suite déterminée par le produit des raideurs normale  $K_n$  et tangente  $K_t$  par les déplacements normaux  $u_n$  et tangents  $u_t$ . Le coefficient de frottement  $\mu$  est un paramètre sans dimension.

L'ensemble des paramètres dimensionnés nécessaires à la description du sous-système

mécanique est présenté dans la table 4.3.

**TABLE 4.3:** Paramètres dimensionnés - sous-système mécanique

Symbole	Description	Unité
$\beta_a, \beta_b$	coefficients de dilatation thermique	$^{\circ}\text{C}^{-1}$
$\Delta T_c$	écart maximal de température	$^{\circ}\text{C}$
$\underline{\sigma}_p, \underline{\sigma}_b, \underline{\sigma}_g$	contraintes (tenseurs)	Pa
$\rho_a, \rho_b$	masses volumiques	$\text{kg}/\text{m}^3$
$g$	accélération due à la pesanteur	$\text{m}/\text{s}^2$
$E_a, E_b$	modules d'Young de l'acier et du béton	Pa
$\sigma_y$	limite d'élasticité de l'acier	Pa
$\sigma_{adh}$	contrainte adhérence interfaces	Pa
$\kappa_n, \kappa_t$	seuils endommagement interfaces	m
$K_n, K_t$	raideurs interfaces	$\text{N}/\text{m}^3$
$u_n, u_t$	déplacements aux interfaces	m

### 1.2.2 Détermination des grandeurs adimensionnées

Afin de réduire le nombre de grandeurs dimensionnées pour éviter les relations parasites, on procède selon la relation (2.27) à une similitude sur chaque paramètre  $X$  en la rapportant à une référence  $X^*$  fixée. On introduit ainsi les quantités adimensionnées  $\tilde{X}$  correspondant aux facteurs d'échelle tandis que les références choisies  $X^*$  sont désormais les seules grandeurs dimensionnées. On peut alors introduire la diffusivité  $\alpha^* = \frac{\lambda^*}{\rho^* c_p^*}$  comme grandeur caractéristique de la conduction thermique,  $\lambda^*$  étant une constante.

Les sous-systèmes thermique et mécanique sont respectivement donnés par les relations<sup>1</sup> (4.9a) et (4.9b).

$$\theta = f^{\text{th}}(\alpha^*, L^*, \lambda^*, h^*, \tau^*, \epsilon^{\text{tot}} \sigma_0, \Delta T_c) \quad (4.9a)$$

$$\underline{\varepsilon} = f^{\text{u}}(L^*, g, \rho^*, \sigma^*, E^*, K^*, \beta^*, \Delta T_c) \quad (4.9b)$$

Où  $f^{\text{th}}$  et  $f^{\text{u}}$  sont des relations fonctionnelles implicites.

L'application du théorème de Vashy-Buckingham au sous-système thermique montre que l'expression (4.9a) est réductible à  $7 - 4 = 3$  paramètres adimensionnels. Un raisonnement analogue sur le sous-système mécanique réduit l'expression (4.9b) à  $8 - 4 = 4$  grandeurs sans dimensions. Nous établissons alors les matrices d'unités décrites par la table 4.4a pour le sous-système thermique et la table 4.4b pour le sous-système mécanique.

1. Dans lesquelles il faut également introduire l'ensemble des facteurs  $\tilde{X}$  et des paramètres sans dimension  $\nu, D, \mu$  que nous ne faisons pas apparaître de façon explicite pour alléger les expressions. Ces grandeurs peuvent être calculées à l'aide des tables 4.1 à 4.3.

**TABLE 4.4:** Matrices des unités : thermique (a) et mécanique (b)

(a)						(b)					
	L	M	T	K			L	M	T	K	
$\alpha^*$	2	0	-1	0	$x_1^{\text{th}}$	$L^*$	1	0	0	0	$x_1^{\text{u}}$
$L^*$	1	0	0	0	$x_2^{\text{th}}$	$g$	1	0	-2	0	$x_2^{\text{u}}$
$\lambda^*$	1	1	-3	-1	$x_3^{\text{th}}$	$\rho^*$	-3	1	0	0	$x_3^{\text{u}}$
$h^*$	0	1	-3	-1	$x_4^{\text{th}}$	$\sigma^*$	-1	1	-2	0	$x_4^{\text{u}}$
$\tau^*$	0	0	1	0	$x_5^{\text{th}}$	$E^*$	-1	1	-2	0	$x_5^{\text{u}}$
$\epsilon^{\text{tot}} \sigma_0$	0	1	-3	-4	$x_6^{\text{th}}$	$K^*$	-2	1	-2	0	$x_6^{\text{u}}$
$\Delta T_c$	0	0	0	1	$x_7^{\text{th}}$	$\beta^*$	0	0	0	-1	$x_7^{\text{u}}$
						$\Delta T_c$	0	0	0	1	$x_8^{\text{u}}$

Des matrices 4.4a et 4.4b, on déduit les systèmes (4.10a) et (4.10b) dont la résolution nécessite des hypothèses.

Sous-système thermique

$$\begin{cases} 2x_1^{\text{th}} + x_2^{\text{th}} + x_3^{\text{th}} = 0 \\ x_3^{\text{th}} + x_4^{\text{th}} + x_6^{\text{th}} = 0 \\ -x_1^{\text{th}} - 3x_3^{\text{th}} - 3x_4^{\text{th}} + x_5^{\text{th}} - 3x_6^{\text{th}} = 0 \\ -x_3^{\text{th}} - x_4^{\text{th}} - 4x_6^{\text{th}} + x_7^{\text{th}} = 0 \end{cases} \quad (4.10a)$$

Sous-système mécanique

$$\begin{cases} x_1^{\text{u}} + x_2^{\text{u}} - 3x_3^{\text{u}} - x_4^{\text{u}} - x_5^{\text{u}} - 2x_6^{\text{u}} = 0 \\ x_3^{\text{u}} + x_4^{\text{u}} + x_5^{\text{u}} + x_6^{\text{u}} = 0 \\ -x_2^{\text{u}} - x_4^{\text{u}} - x_5^{\text{u}} - x_6^{\text{u}} = 0 \\ -x_7^{\text{u}} + x_8^{\text{u}} = 0 \end{cases} \quad (4.10b)$$

Afin de résoudre (4.10a), on cherche trois grandeurs adimensionnées telles que l'une corresponde au phénomène conductif caractérisé par  $\alpha^*$ , l'autre représente les échanges convectifs caractérisés par  $h^*$  et la dernière soit associée aux transferts radiatifs caractérisés par  $\epsilon^{\text{tot}} \sigma_0$ .

Soit donc le vecteur  $\underline{x}^{\text{th}} = (x_1^{\text{th}} \ x_4^{\text{th}} \ x_6^{\text{th}})^t$ . On construit trois vecteurs colinéaires décrivant les trois jeux d'hypothèses nécessaires pour résoudre le système (4.10a) :  $\underline{x}_{\mathcal{H}_1}^{\text{th}} = (1 \ 0 \ 0)^t$ ,  $\underline{x}_{\mathcal{H}_2}^{\text{th}} = (0 \ 1 \ 0)^t$  et  $\underline{x}_{\mathcal{H}_3}^{\text{th}} = (0 \ 0 \ 1)^t$ .

Pour résoudre (4.10b), on recherche quatre nombres adimensionnés dont un premier paramètre représentatif de l'équilibre statique ( $g$ ), un second correspondant au comportement élastique ( $E$ ), un troisième caractérisant les interfaces ( $K$ ) et le dernier associé à l'effet de la température sur le système mécanique ( $\Delta T$ ).

Soit donc le vecteur  $\underline{x}^u = (x_2^u \ x_5^u \ x_6^u \ x_8^u)^t$ . On construit quatre vecteurs colinéaires décrivant les quatre jeux d'hypothèses nécessaires pour résoudre le système (4.10b) :  $\underline{x}_{\mathcal{H}_1}^u = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^t$ ,  $\underline{x}_{\mathcal{H}_2}^u = (0 \ 1 \ 0 \ 0)^t$ ,  $\underline{x}_{\mathcal{H}_3}^u = (0 \ 0 \ 1 \ 0)^t$  et  $\underline{x}_{\mathcal{H}_4}^u = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^t$ .

On détermine ainsi les expressions des sept paramètres adimensionnés explicités dans les tables 4.5a et 4.5b.

**TABLE 4.5:** Paramètres sans dimension : thermique (a) et mécanique (b)

(a)	(b)
$\pi_1^{\text{th}} = \frac{\alpha^* \tau^*}{L^{*2}} : \text{Conduction}$ $\pi_2^{\text{th}} = \frac{h^* L^*}{\lambda^*} : \text{Convection}$ $\pi_3^{\text{th}} = \frac{\epsilon^{\text{tot}} \sigma_0 L^* \Delta T_c^3}{\lambda^*} : \text{Rayonnement}$	$\pi_1^u = \frac{\sigma^*}{\rho^* L^* g} : \text{Statique}$ $\pi_2^u = \frac{E^*}{\sigma^*} : \text{Élasticité}$ $\pi_3^u = \beta^* \Delta T_c : \text{Dilatation}$ $\pi_4^u = \frac{K^* L^*}{\sigma^*} : \text{Interface}$

À partir de ces grandeurs dont on vérifie l'indépendance, nous évaluerons l'impact d'un changement d'échelle sur la réponse structurale.

### 1.3 Analyse des distorsions

Dans la suite, nous désirons concevoir une expérience pour étudier le comportement local d'une maille élémentaire de voile SC porté aux températures accidentelles rencontrées dans les centrales nucléaires (figure 1.5a). Le système couplé thermo-mécanique est constitué des deux relations fonctionnelles (4.9a) et (4.9b) que l'on réduit en faisant intervenir les grandeurs adimensionnées définies dans les tables 4.5a et 4.5b. Le sous-système thermique est ainsi défini par  $\theta_{\text{exp}} = f_{\text{exp}}^{\text{th}}(\pi_{1\text{exp}}^{\text{th}}, \pi_{2\text{exp}}^{\text{th}}, \pi_{3\text{exp}}^{\text{th}}, \tilde{x}_{1\text{exp}}^{\text{th}}, \dots, \tilde{x}_{k\text{exp}}^{\text{th}})$  où  $\forall i \leq k$ , le nombre de paramètres du sous-système thermique,  $\tilde{x}_i^{\text{th}}$  appartenant à l'ensemble des facteurs d'échelle du sous-système thermique défini par  $\{\tilde{x}^{\text{th}} x^{*\text{th}} = x^{\text{th}}\}$ . De façon analogue, la relation  $\underline{\varepsilon}_{\text{exp}} = f_{\text{exp}}^u(\pi_{1\text{exp}}^u, \pi_{2\text{exp}}^u, \pi_{3\text{exp}}^u, \pi_{4\text{exp}}^u, \tilde{x}_{1\text{exp}}^u, \dots, \tilde{x}_{l\text{exp}}^u)$  représente le sous-système mécanique.

#### 1.3.1 Transformation géométrique isotrope

Afin de concevoir un essai représentatif de la physique désirée, il est nécessaire que  $f_{\text{exp}}^{\text{th}} \equiv f^{\text{th}}$  et  $f_{\text{exp}}^u \equiv f^u$ , ce qui n'est possible qu'à condition que les grandeurs adimensionnées satisfassent à (4.7). Notons  $x_{|\mathbb{R}}$  une grandeur physique quelconque du phénomène réel. Il est évident que  $\forall \tilde{x}_{i\text{exp}} \in \{\tilde{x}_{\text{exp}}\}$ ,  $\exists \eta_i \neq 0$  tel que  $x_{i\text{exp}} = \eta_i x_{i|\mathbb{R}}$  et alors  $\tilde{x}_{i\text{exp}} = \tilde{x}_{i|\mathbb{R}} \iff x_{i\text{exp}}^* = \eta_i x_{i|\mathbb{R}}^*$ . Afin d'assurer la conservation des facteurs d'échelle du phénomène réel à l'expérimentation, on décide d'appliquer une transformation identique sur les grandeurs de référence. On

définit alors un changement d'échelle géométrique isotrope entre la maquette et la physique qu'elle doit reproduire tel que  $\mathcal{H} : x_{i|\mathbb{R}} \mapsto x_{i\text{exp}} = \mathcal{N} x_{i|\mathbb{R}}$  avec  $\mathcal{N}(x_i) = \eta_{\mathcal{H}}$  si  $[x_i] = L$ ,  $\mathcal{N} = 1$  sinon. Dans les conditions ainsi définies, l'étude des distorsions se restreint aux grandeurs  $\pi_{1\text{exp}}^{\text{th}}, \dots, \pi_{3\text{exp}}^{\text{th}}, \pi_{1\text{exp}}^{\text{u}}, \dots, \pi_{4\text{exp}}^{\text{u}}$ . On est alors en mesure de quantifier ces dernières.

**TABLE 4.6:** Distorsions suite à une transformation géométrique isotrope

$\pi_{1\text{exp}}^{\text{th}}$	$\frac{1}{\eta_{\mathcal{H}}^2} \pi_1^{\text{th}}$	$\pi_{1\text{exp}}^{\text{u}}$	$\frac{1}{\eta_{\mathcal{H}}} \pi_1^{\text{u}}$
$\pi_{2\text{exp}}^{\text{th}}$	$\eta_{\mathcal{H}} \pi_2^{\text{th}}$	$\pi_{2\text{exp}}^{\text{u}}$	$\pi_2^{\text{u}}$
$\pi_{3\text{exp}}^{\text{th}}$	$\eta_{\mathcal{H}} \pi_3^{\text{th}}$	$\pi_{3\text{exp}}^{\text{u}}$	$\pi_3^{\text{u}}$
		$\pi_{4\text{exp}}^{\text{u}}$	$\eta_{\mathcal{H}} \pi_4^{\text{u}}$

Seuls les facteurs  $\pi_2^{\text{u}}$  et  $\pi_3^{\text{u}}$  restent inviolés après l'homothétie  $\mathcal{H}$ . A priori, l'essai n'est pas représentatif, ni des transferts thermiques, ni du comportement mécanique d'un voile réel. Ce résultat n'est pas surprenant compte tenu des limitations portant sur les paramètres matériaux.

Une analyse composant par composant des distorsions présentées dans la table 4.6 apporte de nouveaux éclaircissements quant aux écarts attendus entre les réponses de la structure testée réduite et de l'élément réel. En effet, la conservation des propriétés thermiques des matériaux permet de conserver l'hypothèse d'isothermie de la plaque en acier chauffée si bien que :  $\theta_{\text{pexp}} = \theta_{\text{p}}$ . Ainsi la violation des termes  $\pi_1^{\text{th}}$ ,  $\pi_2^{\text{th}}$  et  $\pi_3^{\text{th}}$  concerne essentiellement les transferts thermiques dans le remplissage béton et a une incidence négligeable sur la réponse au voilement (figure 3.1).

Par ailleurs, la conservation des facteurs  $\pi_2^{\text{u}}$  et  $\pi_3^{\text{u}}$  stipule que les contraintes d'origine purement thermique sont insensibles au changement d'échelle. On le vérifie à partir de la dimension des efforts membranaires :  $[N] = N/m = M T^{-2}$ , indépendante de l'unité de distance  $L$ . Ainsi, à condition de réaliser une transformation géométrique isotrope sur la plaque en acier, telle que son élanement  $\varphi$  soit conservé, la température critique de la maquette sera identique à la température critique réelle. Dans ces conditions, les réponses de la plaque en acier et du béton peuvent être découplées. L'emploi des similitudes précise alors que l'amplitude des déplacements de la plaque dans la maquette expérimentale vaut  $u_{x\text{exp}} = \eta_{\mathcal{H}} u_x$ ,  $u_{y\text{exp}} = \eta_{\mathcal{H}} u_y$  et  $w_{\text{exp}} = \eta_{\mathcal{H}} w$ .

### 1.3.2 Validation par la simulation numérique

Afin de valider l'étude dimensionnelle réalisée et ses conclusions, quatre simulations numériques sont réalisées. La première sert de référence et modélise une maille élémentaire aux dimensions d'un voile de piscine. Ce modèle est nommé  $\mathbf{M}_{\text{Ref}}$ . On note  $\mathcal{H}$  l'homothétie

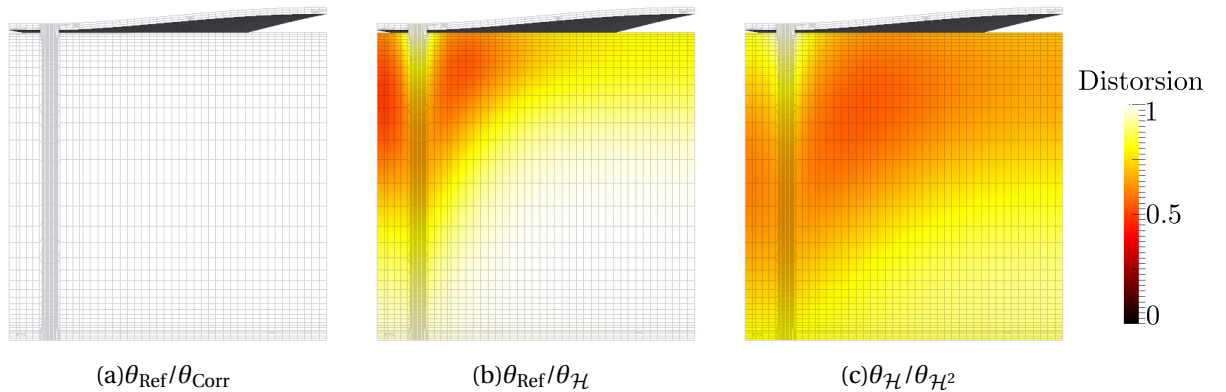
de paramètre  $\eta_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}$ . Pour évaluer les méthodes de prédiction des distorsions présentées au paragraphe 1.1.4, on applique ces méthodes au cas exemple en concevant des modèles numériques à échelles réduites sans conservation des facteurs sans dimension.

On réalise dans ce but les second et troisième modèles ( $\mathbf{M}_{\mathcal{H}}$ ) et ( $\mathbf{M}_{\mathcal{H}^2}$ ) qui sont définis de la manière suivante :  $\mathbf{M}_{\text{Ref}} \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathbf{M}_{\mathcal{H}}$  et  $\mathbf{M}_{\mathcal{H}} \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathbf{M}_{\mathcal{H}^2}$ . Le dernier modèle ( $\mathbf{M}_{\text{Corr}}$ ) introduit une correction des grandeurs physiques de telle sorte que l'ensemble des paramètres sans dimension des tables 4.5a et 4.5b soit préservé. Les hypothèses de chaque modèle sont synthétisées dans la table 4.7.

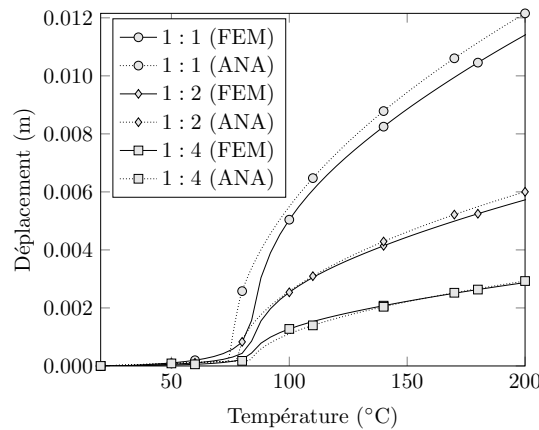
**TABLE 4.7:** Rapports de chaque grandeur sur sa référence pour  $\mathbf{M}_{\text{Ref}}$ ,  $\mathbf{M}_{\mathcal{H}}$ ,  $\mathbf{M}_{\mathcal{H}^2}$  et  $\mathbf{M}_{\text{Corr}}$

(a) Thermique					(b) Mécanique				
	$\mathbf{M}_{\text{Ref}}$	$\mathbf{M}_{\mathcal{H}}$	$\mathbf{M}_{\mathcal{H}^2}$	$\mathbf{M}_{\text{Corr}}$		$\mathbf{M}_{\text{Ref}}$	$\mathbf{M}_{\mathcal{H}}$	$\mathbf{M}_{\mathcal{H}^2}$	$\mathbf{M}_{\text{Corr}}$
$L^*$	1	1/2	1/4	1/2	$L^*$	1	1/2	1/4	1/2
$h^*$	1	1	1	1	$\Delta T_c$	1	1	1	1
$\epsilon^{\text{tot}} \sigma_0$	1	1	1	1	$\beta^*$	1	1	1	1
$\lambda^*$	1	1	1	1/2	$\sigma^*$	1	1	1	1
$C_p^*$	1	1	1	1	$E^*$	1	1	1	1
$\rho^*$	1	1	1	2	$K^*$	1	1	1	2
$\tau^*$	1	1	1	1	$g$	1	1	1	1
$\Delta T_c$	1	1	1	1					

La figure 4.1a révèle que les corrections réalisées sur les propriétés matériaux dans  $\mathbf{M}_{\text{Corr}}$  permettent de retrouver le comportement de la référence  $\mathbf{M}_{\text{Ref}}$ . En effet, le facteur de prédiction tel que défini par (4.8) vaut  $\delta_{\text{exp}} = 1$ . Ce résultat conforte l'étude dimensionnelle réalisée et le choix des quantités sans dimension retenues (tables 4.5a et 4.5b).



**FIGURE 4.1:** Cartes des facteurs de prédiction pour la variable  $\theta$



**FIGURE 4.2:** Effet d'une homothétie sur le déplacement hors-plan : calculs éléments finis (FEM) et analytiques (ANA)

Les figures 4.1b et 4.1c montrent que les facteurs de prédictions ne sont pas identiques pour les transformations  $M_{\text{Ref}} \xrightarrow{\mathcal{H}} M_{\mathcal{H}}$  et  $M_{\mathcal{H}} \xrightarrow{\mathcal{H}} M_{\mathcal{H}^2}$ . Il n'est donc pas possible de prédire la réponse réelle d'une structure par la confrontation des réponses de deux maquettes  $M_{\mathcal{H}}$  et  $M_{\mathcal{H}^2}$  telles que nous les avons définies en présence d'un régime transitoire. Les méthodes présentées en 1.1.4 ne peuvent être appliquées qu'en régime stationnaire. Cependant, la figure 4.1a confirme le comportement toujours isotherme de la plaque en acier après transformation géométrique, à des températures identiques à celle de l'échelle 1 : 1.

Enfin, le tracé du déplacement hors-plan maximal pour  $M_{\text{Ref}}$ ,  $M_{\mathcal{H}}$  et  $M_{\mathcal{H}^2}$  (figure 4.2) confirme les conclusions de l'étude dimensionnelle théorique quant à la problématique particulière du voilement thermique local. En effet, les déplacements sont divisés par deux, entre chaque transformation, conformément aux attentes tandis que la température critique n'est pas affectée. On note que le modèle analytique développé au chapitre III permet de retrouver ce constat.

### 1.3.3 Conséquences sur la conception des éléments testés

En prenant comme géométrie de référence les dispositions classiques rencontrées pour les liners d'enceinte, l'espacement entre tirants est compris entre 150 et 250mm pour une tôle épaisse de 6mm [Mézière, 2004].

Les études réalisées au chapitre III précisent qu'en présence d'un bridage parfait de la dilatation, un déplacement hors-plan se produit pour des températures avoisinant 90°C. À de telles températures, les déplacements plans pour les dimensions énoncées sont de l'ordre de 0.2mm et augmentent jusqu'à 0.5mm à 180°C.

Le bridage de si faibles déplacements étant une condition limite excessivement difficile à maîtriser, nous appliquons un facteur d'échelle à la géométrie de référence que nous limiterons à  $\eta_{\mathcal{H}} = 2$  compte tenu des limitations matérielles. Nous considérons ainsi des spécimens carrés de 635mm de dimension, les espacements entre tirants variant de 350 à 500mm



tandis que l'épaisseur des plaques métalliques varie de 6mm à 15mm afin de tester plusieurs élançements. La description des éléments retenus pour les tests est donnée par la table 4.8.

Finalement, lors de la conception des éléments modulaires, afin de réduire le déplacement hors plan, à élançement fixé, il est préférable de réduire les dimensions tout en veillant à ne pas opter pour des tôles trop fines qui risquent d'être percées lors de la soudure des tirants.

**TABLE 4.8:** Caractéristiques géométriques des éléments testés

Désignation	$\varphi$	$s$ (mm)	$l$ (mm)	$t_p$ (mm)	$t_b$ (mm)	Quantité	Commentaires
SPE33	33	500	635	15	235	1	absence de voilement recherchée
SPE45	45	360	635	8	235	1	amplification plastique si CLS assurées
SPE50	50	500	635	10	235	1	voilement si CLS assurées
SPE50D	50	500	635	10	235	1	défait d'affleurement
SPE66	66	400	635	6	235	1	
SPE83	83	500	635	6	235	2	
SPE83D	83	500	635	6	235	2	défait d'affleurement

## 2 Conception de la campagne expérimentale locale

Ce second paragraphe est destiné à la conception de la campagne expérimentale que nous avons réalisée dans le cadre de notre étude du voilement local des éléments composites acier-béton.

L'objectif de cette campagne d'essai est double et consiste à caractériser le voilement thermique local (i) ainsi qu'à construire une base de données (ii) qui, en dépit de ses limitations, établit une référence par rapport à laquelle les résultats issus des modèles numériques (chapitre II) et analytiques (chapitre III) seront validés en partie 3.

Nous étudierons plus spécifiquement la réponse post-critique (déplacement hors plan au centre de l'élément, température critique). Des mesures seront également réalisées sur le déplacement résiduel, lors de la décharge thermique, pour quantifier le poids de la plasticité dans la réponse.

Afin d'étudier différents régimes de fonctionnement, les échantillons testés présentent des élançements variables (voir table 4.8). Parmi eux, les éléments SPE45 et SPE50 sont susceptibles de se voiler lorsque les conditions limites sont correctement assurées au cours de l'essai. Par ailleurs, nous introduisons deux éléments présentant un défaut d'affleurement : SPE50D et SPE83D pour en étudier l'influence sur le comportement local. Ce défaut consiste en une imperfection géométrique de 2mm d'amplitude introduite par le mauvais alignement de demi-plaques soudées dans leur longueur (voir plans annexe E).

Dans un premier temps, nous reviendrons sur les difficultés à satisfaire aux conditions limites, difficultés que nous avons levées en concevant un support expérimental original. Nous préciserons ensuite les solutions retenues pour l'acquisition des données puis le système chauffant. Une synthèse finale présentera le protocole expérimental.

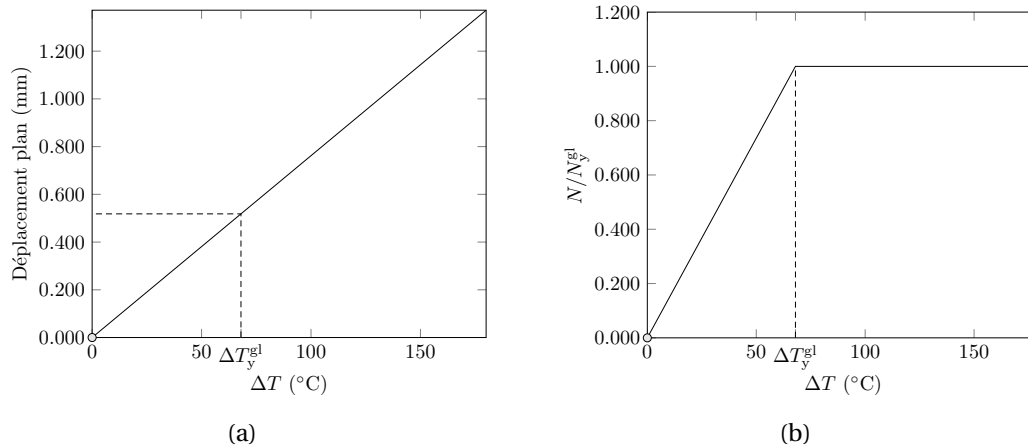
## 2.1 Conception du support expérimental

Les dimensions réduites des éléments testés (table 4.8), conséquences de l'analyse dimensionnelle et des limitations matérielles imposées par l'environnement, entraînent des déplacements plans faibles dus à la dilatation thermique de la plaque (figure 4.3a).

Le phénomène de voilement thermique tel que nous souhaitons l'observer trouve son origine dans le bridage de ces déplacements plans. Au niveau structurel, ce bridage est assuré en partie par les tirants et essentiellement par les liaisons avec les différents constituants de la structure (voiles, radier, planchers). Lorsque le déplacement plan est bloqué, la réaction d'appuis développée sollicite la plaque chauffée en compression introduisant un risque de voilement.

Au niveau expérimental, les résultats seront d'autant plus conformes aux études théoriques que le bridage réalisé s'approche de la perfection, ce qui est d'autant plus délicat que les déplacements à reprendre sont petits (voir figure 4.3a).

Par ailleurs, la dilatation thermique de la plaque s'accompagne d'efforts internes (figure 4.3b) dont l'intensité est calculée à l'aide de la relation simplifiée  $N = \min(N^{\text{th}}, N_y^{\text{gl}})$  où  $N^{\text{th}} = \frac{E_a \beta_a \Delta T t_p}{1-\nu}$  et  $N_y^{\text{gl}} = \frac{\sigma_y t_p}{1-\nu}$ .



**FIGURE 4.3:** Conditions limites théoriques à récupérer : déplacement plan  $s_x = s_y = 635\text{mm}$  (a), effort normalisé  $N/N_y^{\text{gl}}$  (b)

Compte tenu du matériau acier (S235) utilisé dans la conception des éléments, les efforts développés aux réactions d'appuis sont considérables (table 4.9).

**TABLE 4.9:** Efforts théoriques maximums développés lors des essais

Spécimen	SPE33	SPE45	SPE50	SPE66	SPE83
$N_y^{\text{gl}}$ (MN/m)	5.0	2.7	3.4	2.0	2.0

Il est donc nécessaire de concevoir un dispositif expérimental particulier capable de brider des déplacements de l'ordre<sup>2</sup> de  $\sim 0.5\text{mm}$  tout en résistant à des efforts de l'ordre de  $\sim 2\text{ MN}$ .

### 2.1.1 Choix de la structure d'accueil

Dans la littérature, les essais de caractérisation du voilement de tôles minces font classiquement intervenir des sollicitations d'origine mécanique appliquées à l'élément testé à l'aide de vérins [Singer, 1987, Akiyama *et al.*, 1991, Takeuchi *et al.*, 1998]. Dans le cas du voilement thermique, les efforts doivent être appliqués au spécimen testé à l'aide d'un système de confinement passif.

Des essais de cette nature ont été réalisés sur des structures de génie civil, notamment des maquettes représentatives de liners d'enceintes [Müller, 2013] ou d'éléments SC [Sekimoto et Kondo, 2001]. À l'échelle structurelle, un nombre conséquent de tirants suffit à brider naturellement les déplacements plans pour le chauffage local de la structure. Par ailleurs la présence de précontrainte et de cornières dans la technologie du liner d'enceinte participe également au confinement de la plaque en acier. La technologie différente et les restrictions géométriques pour l'étude de la maille élémentaire ne permettent pas de procéder à l'identique dans notre situation.

Dans le domaine de l'aéronautique, l'échauffement des matériaux dû aux frottements de l'air introduit un risque de voilement de plaques minces. Par conséquent, des études expérimentales ont été réalisées sur des éléments de plus faibles dimensions et de fort élancement :  $900 \times 600 \times 6\text{mm}^3$  [Gossard *et al.*, 1952],  $300 \times 300 \times 2\text{mm}^3$  [Uemura *et al.*, 1962],  $762 \times 381 \times 3\text{mm}^3$  [Murphy et Ferreira, 2001]. Les trois travaux cités présentent des protocoles expérimentaux sensiblement identiques. En effet, une seule plaque en alliage d'aluminium était étudiée tandis que le système de confinement passif est constitué d'un cadre en acier (chromé) dans lequel le spécimen testé est vissé. Un système de refroidissement hydraulique est prévu pour maintenir le cadre à température ambiante tandis que le centre de l'élément est chauffé. Si les paramètres matériaux des alliages en aluminium<sup>3</sup> autorisent un tel montage, ce dernier est moins adapté au matériau acier. Dans ce cas en effet, il n'y aurait plus d'incompatibilité de déformation entre la plaque, les vis et le support, les deux éléments présentant un coefficient de dilatation proche. Ensuite, à cause du module d'Young plus élevé de l'acier, les efforts générés augmentent le risque de ruine en cisaillement des vis, le support devant être le plus indéformable possible.

2. Le voilement devant théoriquement se produire pour des températures inférieures à  $\Delta T_y^{\text{gl}}$  pour  $\varphi \geq 50$  selon la figure 3.21. L'expression de  $\Delta T_y^{\text{gl}}$  est donnée par l'équation (3.46).

3. On rappelle que pour un alliage en aluminium,  $E = 70000\text{GPa}$ ,  $\sigma_y = 100\text{MPa}$ ,  $\rho = 2800\text{kgm}^{-3}$ ,  $\beta = 25 \cdot 10^{-6}\text{°C}^{-1}$ ,  $\lambda = 237\text{W/(mK)}$  et  $C_p = 880\text{J/(kgK)}$ , variables selon l'alliage.

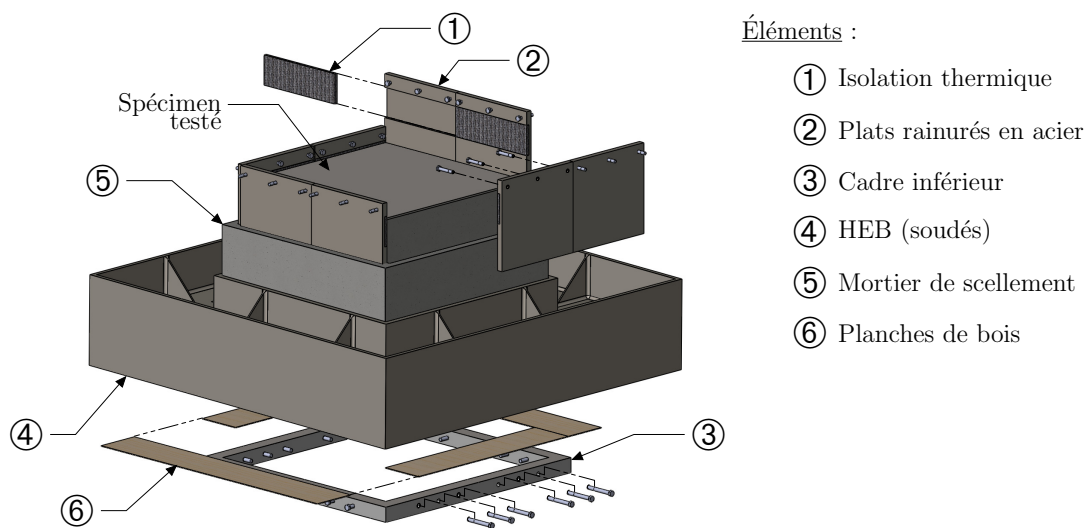


FIGURE 4.4: Vue en éclaté du support expérimental

Il est donc nécessaire pour notre étude de concevoir un support expérimental satisfaisant aux besoins suivants : raideur importante pour le bridage des déplacements (i), isolation thermique de la plaque chauffée (ii), résistant à des efforts importants (iii) et réutilisable pour les différents spécimens (iv). La figure 4.4 illustre la solution que nous avons retenue pour satisfaire aux critères énoncés.

2.1.2 Rôle des éléments constitutifs du support

Les choix technologiques signalés dans la figure 4.4 sont justifiés dans la suite. La table 4.10 propose une synthèse des fonctions et contraintes auxquelles répondent chaque constituant du bâti expérimental.

TABLE 4.10: Fonctions et contraintes des constituants du support

Technologie	Isolation thermique	Résistance	Raideur	Etanchéité	Contact	Continuité	Souplesse d'utilisation
①	f	c	c				
②		c	c	f	f		c
③					f		
④		f	f				c
⑤	f	c	c			f	c
⑥				f			

f : fonction, c : contrainte

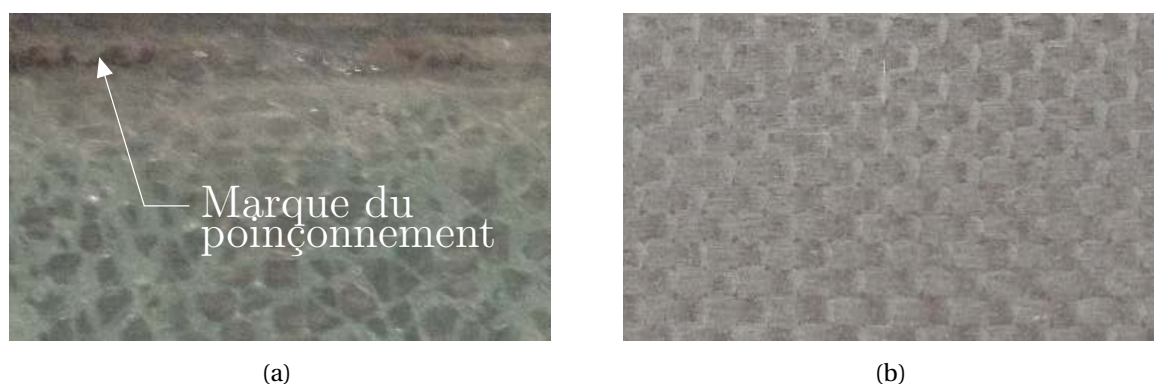
① **Éléments d'isolation thermique :** Afin de procurer la raideur nécessaire à la structure support, les constituants du système de confinement sont essentiellement en acier S235.

Il est alors nécessaire de découpler thermiquement les réponses des composants en acier de celle de la plaque chauffée du spécimen testé. Ceci est accompli par l'introduction dans le système de bridage d'une couche d'isolation thermique dont la raideur et la résistance doivent être suffisantes pour maintenir le confinement.

Les résultats obtenus grâce aux études de sensibilité réalisées au chapitre III signalent qu'un matériau dont le module d'Young est voisin de  $E \approx 20000\text{MPa}$  possède une raideur suffisante pour assurer le bridage requis. L'élément d'isolation doit également être capable de supporter des contraintes de compression de l'ordre de la limite d'élasticité  $\sigma_y = 235\text{MPa}$  de l'acier utilisé pour la tôle métallique chauffée du spécimen.

La première solution envisagée consistait à employer des plaques de verre trempé. Ce matériau remplissait théoriquement les conditions requises comme le signale la table 4.11. Toutefois, la faiblesse du verre trempé face au risque de poinçonnement avait été sous estimée dans les premières études si bien que la ruine de l'élément isolant (figure 4.5a) survint lors des essais préliminaires, n'assurant plus la reprise des efforts et des déplacements.

Afin de pallier cette difficulté, les plaques de verre ont été remplacées par une résine plastique thermodurcissable renforcée à l'aide de fibre de verre, de référence KV<sup>®</sup> 3eco, produit par la société BRANDENBURGER (figure 4.5b).



**FIGURE 4.5:** Isolation : Ruine du verre poinçonné (a) KV<sup>®</sup> 3eco (b)

Ce nouvel isolant offre une meilleure résistance à la flexion pour une meilleure isolation thermique que le verre (table 4.11). Bien qu'il soit moins raide que le verre, le module d'Young de  $25000\text{MPa}$  reste conforme à nos prescriptions. Enfin, le coefficient de dilatation thermique un peu élevé ( $\beta = 80 \cdot 10^{-6} \text{°C}^{-1}$ ) doit être considéré au regard de l'épaisseur de l'isolant (10mm), ce qui se traduit par des déplacements d'un ordre de grandeur inférieurs à ceux de la tôle chauffée du spécimen étudié.

La trace laissée par la dilatation de la plaque chauffée suggère que l'isolant subit une déformation au cours de l'essai. Toutefois, sa profondeur étant trop faible pour être quantifiable on considère les plaques de KV<sup>®</sup> 3eco réutilisables d'un essai à l'autre.

**TABLE 4.11:** Propriétés mécaniques et thermiques des solutions d'isolation thermique

	$\rho$ kg m <sup>-3</sup>	$E$ MPa	Résistance (compression) MPa	Résistance (flexion) MPa	$\beta$ °C <sup>-1</sup>	$\lambda$ W/(m K)	$C_p$ J/(kg K)
Verre trempé	2500	70000	1000	49	$9 \cdot 10^{-6}$	1	700
KV <sup>®</sup> 3eco (20°C)	2000	25000	650	600	$80 \cdot 10^{-6}$	0.25	1000
KV <sup>®</sup> 3eco (200°C)	2000	18000	450	300	$80 \cdot 10^{-6}$	0.30	1000

② **Plats métalliques rainurés :** Des plats métalliques rainurés de façon à accueillir l'isolant thermique sont disposés autour de l'élément testé (voir plans annexe E). Ils apportent une raideur supplémentaire pour le bridage des déplacements et permettent de répartir les efforts.

Ces éléments métalliques sont percés et munis de vis M10 qui, grâce à un serrage manuel, permettent d'assurer et de régler le contact initial entre la plaque chauffée de l'élément testé et l'isolant thermique. On supprime ainsi le jeu parasite introduit lors du positionnement des différents composants pendant le montage.

Les études ont révélé que les plats métalliques plastifient dès le premier essai et perdent à ce moment leur planéité. Lors de la mise en contact de l'isolant et de la tôle chauffée puis au cours de l'essai, ce défaut de planéité entraîne une flexion parasite contribuant à la ruine du verre trempé initialement choisi.

Les plats en acier sont disposés en quinconce. Leurs dimensions (voir plans annexe E) et leur nombre (8) leur permet de s'adapter aux différentes configurations rencontrées lors des essais (passage des câbles électriques).

③ **Système de bridage inférieur :** Un cadre en acier muni de vis M12 permet de fixer le bas des plats métalliques et en restreint les rotations lorsqu'on procède à la mise en contact des éléments d'isolation avec la plaque en acier chauffée.

④ **HEB300 soudés :** Il constitue l'élément confinant principal. Inamovible et découplé thermiquement de l'élément testé, il assure le maintien de l'essai lors de sa réalisation. Des raidisseurs sont prévus pour maintenir la forme des ailes des poutrelles tandis que l'âme est située dans le même plan horizontal que la plaque chauffée du spécimen testé.

⑤ **Mortier de scellement :** Un jeu total de 6cm est prévu entre l'élément SC testé et l'ensemble HEB soudé afin d'éviter toutes difficultés liées aux erreurs de tolérance dans la conception des divers constituants de l'essai. Ce jeu facilite également le positionnement du cadre HEB lors du montage. Afin d'effectuer la liaison entre les plats métalliques rainurés et le HEB, un mortier de scellement est utilisé pour combler l'espace libre. Ce mortier procure une isolation thermique supplémentaire entre plat métallique et HEB.

Il doit évidemment répondre aux critères de raideur tandis que le jeu potentiellement introduit par les déformations de retrait au jeune âge ne doit pas parasiter l'essai. Pour ces raisons, le mortier à retrait compensé WEBER HP. Cel a été retenu. Les caractéristiques du produit ont été validées dans le cadre d'un stage de Master 2 dont on présente les résultats.

Les caractéristiques du mortier sont étudiées au jeune âge, après 1 et 2 jours de séchage, l'essai de voilement voulant être réalisé rapidement après mise en œuvre du mortier. Trois essais de compression sont réalisés pour chaque durée de séchage sur des éprouvettes cylindriques  $\varnothing 16 \times 32$ . Les valeurs de la résistance à la compression moyenne obtenues sont 29MPa à 1 jour et 34MPa à 2 jours. Le module d'Young moyenné, déterminé sur la partie linéaire de la réponse pour une contrainte  $\sigma = 0.3\sigma_{\max}$  s'élève à 25000MPa, suffisant pour nos besoins.

Cinq éprouvettes rectangulaires  $4 \times 4 \times 16$  ont également été confectionnées pour étudier le retrait total exprimé en fonction de la perte en masse. Deux éprouvettes sont couvertes d'un film adhésif de manière à éviter tout échange d'humidité avec le milieu extérieur, pour vérifier plus spécifiquement le retrait endogène.

Au bout de 48 heures, la perte de masse maximale mesurée vaut 5% pour une déformation de retrait totale de  $400\mu\text{m/m}$ . La valeur de retrait endogène est faible au bout de 48 heures et vaut  $40\mu\text{m/m}$ . Lors de l'essai, on estime que le retrait réel attendu doit être plus proche de la valeur mesurée pour le retrait endogène que pour le retrait total, la composante de dessiccation étant réduite par le confinement.

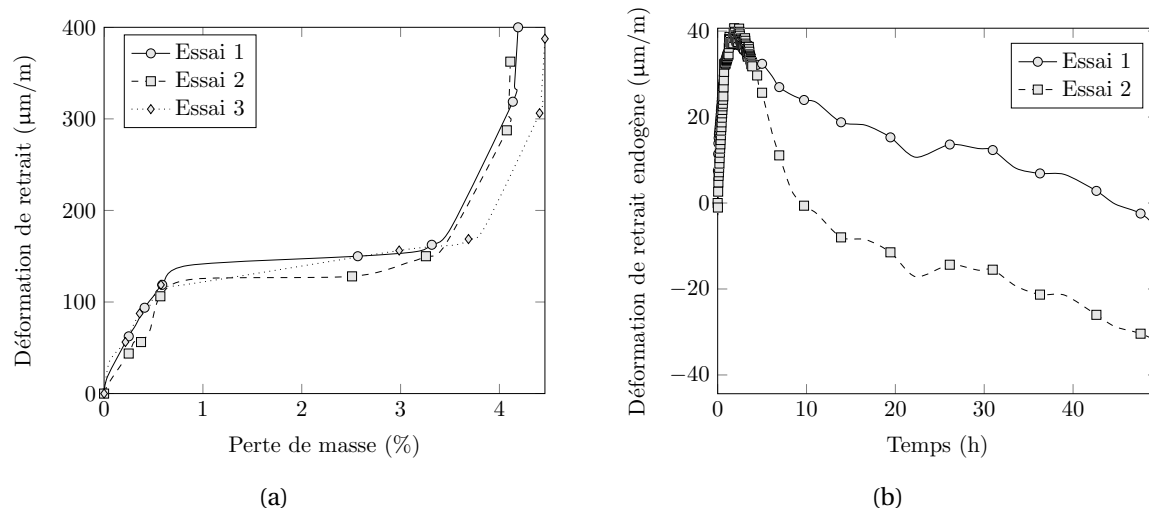


FIGURE 4.6: Mesures de retrait : total (a) endogène (b)

En supposant que la dessiccation survienne malgré tout, le jeu induit par le retrait du mortier est d'un ordre inférieur au déplacement de la plaque chauffée, ce qui n'est pas préjudiciable à l'essai de voilement.

⑥ **Planches de bois :** Elles assurent l'étanchéité lors de la mise en œuvre du mortier.

### 2.1.3 Vérification par la simulation numérique

Un modèle complet de l'expérience est réalisé pour vérifier *a priori* le concept théorique de l'essai. L'élément modélisé au centre correspond au spécimen SPE83.

Les modules d'Young des matériaux d'isolation<sup>4</sup> et du mortier sont volontairement réduits d'un facteur 2. L'ensemble des éléments est maillé à l'aide d'éléments hexaédriques, exception faite du cadre HEB modélisé par des éléments coques.

Les déplacements sont supposés continus à l'interface plaque chauffée du spécimen testé-isolant thermique et le contact parfait.

Enfin, des erreurs de tolérance sont introduites dans les dimensions de telle sorte que la structure ne soit plus symétrique.

Le voilement thermique se produit correctement dans le modèle numérique, au centre de la zone délimitée par les tirants comme l'illustre la figure 4.7.

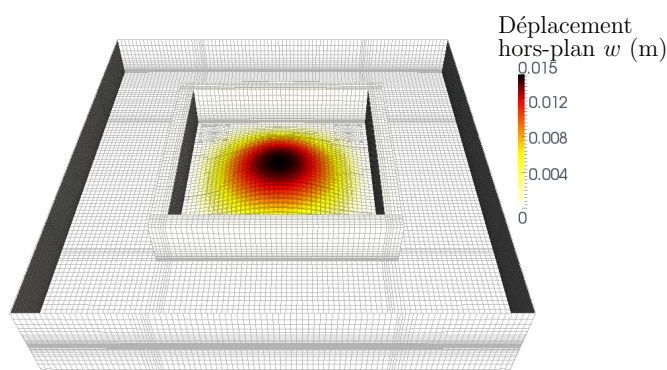


FIGURE 4.7: Champs de déplacements à 200°C ( $\times 5$ ), modèle FEM du dispositif expérimental

## 2.2 Systèmes d'acquisition

Deux données sont principalement mesurées lors des essais. Il s'agit du déplacement hors-plan et de la température. Nous détaillons ici les positions des capteurs et technologies utilisés.

Le déplacement hors-plan sera obtenu *via* deux méthodes : ponctuellement par mesures directes avec des LVDTs et sous forme de champ grâce à un algorithme de stéréo-corrélation. Les températures seront mesurées à l'aide de thermocouples.

### 2.2.1 Mesures ponctuelles du déplacement par LVDT

Bien que des capteurs LVDT adaptés aux hautes températures existent, nous avons été contraints à utiliser des capteurs standards. Afin de les protéger de la chaleur, le pointeau est prolongé d'une tige en céramique (figure 4.8b).

4. Lors de cette validation, en amont de la campagne d'essai, le matériau d'isolation considéré était le verre trempé dont le module  $E = 70000\text{MPa}$  est trois fois supérieur à celui de la résine thermodurcissable.



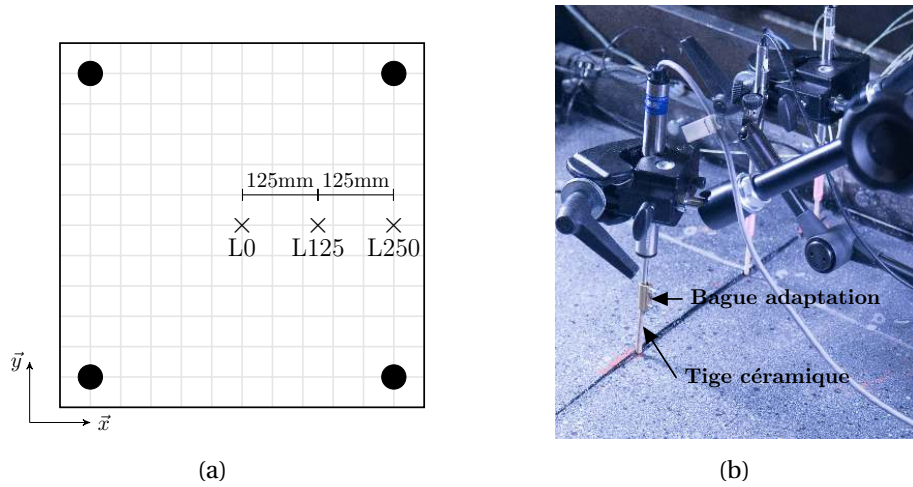


FIGURE 4.8: LVDT : position (a), technologie (b)

Des mesures ponctuelles sont réalisées à trois positions de la plaque (figure 4.8a) : au centre par le capteur **L0**, à 125mm du centre suivant  $\bar{x}$  par **L125** et à 250mm du centre suivant  $\bar{x}$  par **L250**. Des bras magnétiques, fixés au cadre HEB, permettent de maintenir les capteurs en position au cours de l'essai.

### 2.2.2 Stéréo-corrélation

La mesure par stéréo-corrélation permet de mesurer des formes en trois dimensions et des champs de déplacements en confrontant au moins deux images, prises en configuration déformée, avec autant d'images de référence. Les positions des imageurs restent fixes au cours de l'essai.

**Étalonnage des matrices de projection :** Chaque appareil photo peut être assimilé à une projection de  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Résoudre le problème de stéréo-corrélation consiste à résoudre le problème inverse permettant, à partir des projetés, de reconstruire le volume initial. Pour cela, la transformation réalisée par chaque imageur est représentée par une matrice de projection  $\underline{\underline{M}}^{l,r}$  (où  $l$  représente l'appareil de gauche et  $r$  celui de droite). La connaissance des matrices  $\underline{\underline{M}}^{l,r}$  permet de connaître à tout moment et pour tout point de  $\mathbb{R}^3$  sa position dans chaque photo prise au cours de l'essai.

L'approche globale appliquée pour résoudre le problème de stéréo-corrélation s'apparente aux méthodes de résolution utilisées dans les simulations numériques. En effet, il est nécessaire de construire une géométrie théorique et d'introduire une base de fonctions interpolatrices adaptée au maillage sur lequel s'appuie la résolution.

Dans la méthode développée au sein du LMT [Dufour, 2015] que nous employons, le choix a été fait de paramétrer les surfaces à l'aide de courbes à pôles de type NURBS (non-uniform rational B-splines), définies par une séquence de point de contrôle et un degré

[Piegl et Tiller, 1997], plutôt que d'utiliser une solution éléments finis. Ce choix est motivé par l'aptitude de ces fonctions à représenter des surfaces complexes pour un minimum de degrés de liberté, ce qui limite le coût calculatoire [Beaubier *et al.*, 2014]. Dans cet espace paramétrique, la surface  $\underline{\underline{S}}(u, v) = (X, Y, Z)$  s'écrit :

$$\underline{\underline{S}}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \omega_{ij} \underline{\underline{P}}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \omega_{ij}} \quad (4.11a)$$

avec

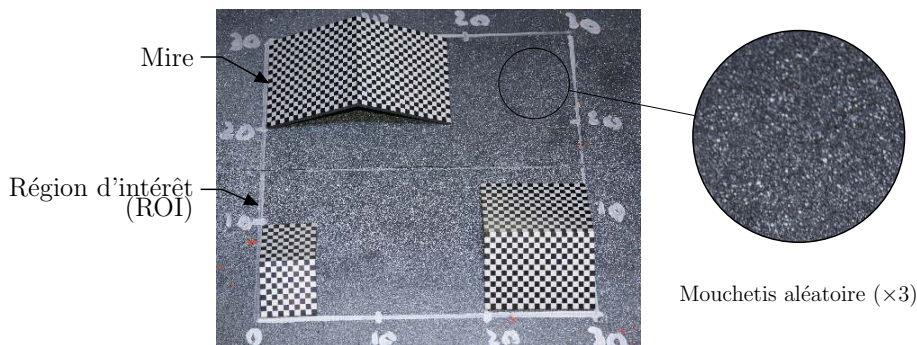
$$\forall u \in [0, 1], N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.11b)$$

et

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u_i}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (4.11c)$$

où  $N_{i,p}$  sont les fonctions de forme,  $\underline{\underline{P}}$  sont les coordonnées des points de contrôle définissant la géométrie,  $\omega_{ij}$ , les poids des fonctions de forme,  $(p, q)$ , les degrés de la surface dans chaque direction et  $(m+1) \times (n+1)$  sont le nombre de points dans chaque direction de l'espace paramétrique.

L'étalonnage des matrices  $\underline{\underline{M}}^{l,r}$  est alors basé sur la connaissance exacte d'une géométrie 3D appartenant à la surface observée que l'on désire par la suite reconstruire. Cet objet de référence est supposé correspondre parfaitement au modèle théorique NURBS. C'est la raison pour laquelle nous plaçons des mires planes (figure 4.9) de géométrie parfaitement maîtrisée sur la plaque de l'élément testé.



**FIGURE 4.9:** Préparation de la plaque chauffée pour l'étalonnage de la stéréo-corrélation

La relation entre la surface 3D initiale et sa projection photographique s'exprime au travers des relations  $\underline{\underline{x}}^{l,r} = \underline{\underline{M}}^{l,r} \cdot \underline{\underline{X}}$  où  $\underline{\underline{x}}^{l,r} = (s^{l,r} x, s^{l,r} y, s^{l,r})$  définissent les coordonnées du

projeté,  $s^{l,r}$  étant un facteur d'échelle et  $\underline{X} = (X, Y, Z, 1)$  sont les coordonnées homogènes de n'importe quel point de la géométrie 3D. Or, chaque point pour chaque photo appartient à une surface paramétrique (NURBS) unique. Dans l'espace paramétrique, il s'en déduit  $x^{l,r}(u, v) = \frac{M_{1i}^{l,r} X_i(u, v)}{M_{3i}^{l,r} X_i(u, v)}$  et  $y^{l,r}(u, v) = \frac{M_{2i}^{l,r} X_i(u, v)}{M_{3i}^{l,r} X_i(u, v)}$ , ce qui laisse 24 inconnues  $M_{i,j}^{l,r}$  à déterminer par une méthode de corrélation d'image digitale [Beaubier *et al.*, 2014].

La résolution de ce nouveau problème consiste à satisfaire au mieux la correspondance entre les deux niveaux de gris de chaque photo :

$$f(x^l) = g(x^r) \quad (4.12)$$

La condition (4.12) est résolue en minimisant « la somme des différences quadratiques d'images » [Dufour, 2015] :

$$\eta^2 = \int_{\text{ROI}} \left[ f(\underline{x}^l(u, v, \underline{M}^l)) - g(\underline{x}^r(u, v, \underline{M}^r)) \right]^2 du dv \quad (4.13)$$

Où ROI est la région d'intérêt dans laquelle un mouchetis aléatoire a été réalisé au préalable à l'aide d'une peinture résistante aux hautes températures. L'équation (4.13) est ensuite linéarisée en  $\eta_{\text{lin}}^2 = \int_{\text{ROI}} \left[ f(\underline{x}^l) - g(\underline{x}^r) + (\nabla f \cdot \delta \underline{x}^l) \underline{x}^l - (\nabla g \cdot \delta \underline{x}^r) \underline{x}^r \right]^2 du dv$  avec  $\delta \underline{x}^{l,r} = \frac{\partial \underline{x}^{l,r}}{\partial M_{ij}^{l,r}} M_{ij}^{l,r}$ , puis résolue grâce à une procédure de Newton [Beaubier *et al.*, 2014].

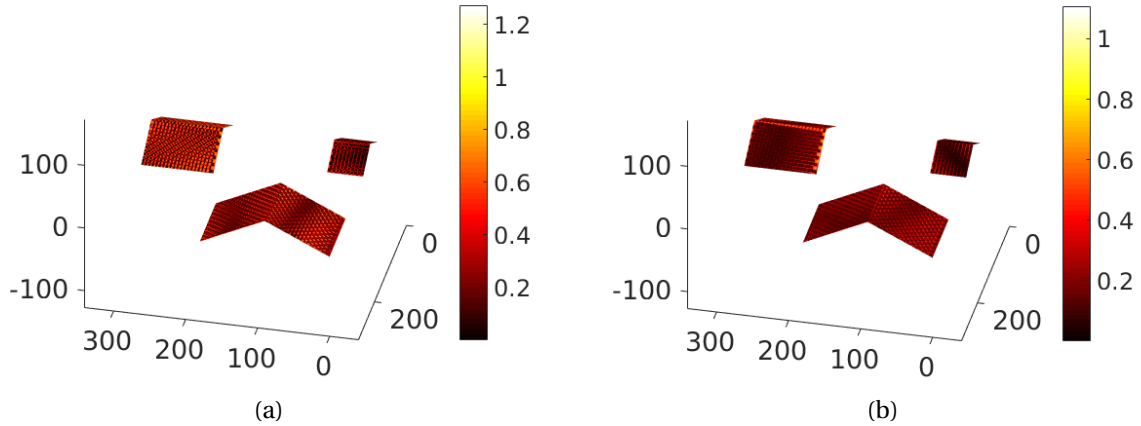


FIGURE 4.10: Étalonnage des matrices : Résidus à l'itération 1 (a), Résidus finaux (b)

**Étalonnage de la surface :** Une fois les matrices de passage connues, la seconde étape d'étalonnage consiste à construire la meilleure CAO sur laquelle s'appuie la résolution temporelle de l'algorithme de stéréo-corrélation. Cet objectif est atteint en déplaçant les points de contrôle des NURBS  $\underline{P}_{ij}$  jusqu'à obtenir une correspondance suffisante entre la surface réelle à l'instant initial et la géométrie théorique de référence. Pour cela, une procédure identique à (4.13) est utilisée [Beaubier *et al.*, 2014], linéarisée cette fois en  $\delta \underline{x}^{l,r} = \frac{\partial \underline{x}^{l,r}}{\partial \underline{X}} \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{P}_{ij}} \underline{P}_{ij}$ . La

figure 4.10 présente les cartes des résidus pour la forme théorique des mires avant et après l'étape d'étalonnage des matrices de projections.

**Résolution temporelle :** L'algorithme de stéréo-corrélation consiste enfin à reconduire le procédé (4.12) sur chaque étape temporelle en confrontant les surfaces reconstruites au temps  $\tau$  avec la surface générée lors de la seconde étape d'étalonnage. L'équation (4.12) devient  $f(\underline{x}) = g(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}))$  où  $\underline{u}$  est le champ de déplacement inconnu recherché.

**Difficultés spécifiques aux chargements thermiques :** Les méthodes de corrélation d'images ont été tardivement appliquées aux études impliquant de hautes températures. Deux difficultés majeures ont été recensées par [Lyons *et al.*, 1996] lors de mesures de déformations réalisées par corrélation d'images au cours d'essais de traction haute température sur acier.

La première difficulté est spécifique aux températures supérieures à 600°C, causée par le rayonnement infrarouge que les matériaux émettent à partir de ces températures [Leplay, 2011]. Étant donné notre niveau de température, ce problème ne se pose pas au cours de nos essais.

Le second problème concerne les perturbations causées par l'échauffement de l'air autour des objets chauds. En effet, la formation d'un gradient thermique dans l'air entraîne l'apparition d'un gradient des indices de réfraction de l'air, causant des erreurs lors de mesures dimensionnelles par effet mirage [Delmas, 2012]. Afin de corriger les défauts générés par l'effet mirage, nous réalisons la prise de photo lors du refroidissement au cours duquel nous utilisons un ventilateur afin de mélanger et d'homogénéiser les indices de réfraction [Lyons *et al.*, 1996].

### 2.2.3 Mesures ponctuelles de la température par thermocouples

Les températures sont mesurées ponctuellement avec des thermocouples de type K. La figure 4.11 précise la position des capteurs.

Les thermocouples **B0**, **B15** et **B35** sont situés à l'aplomb du centre de l'élément dans le remplissage béton du spécimen à des distances respectives de l'intrados de la plaque en acier de 0mm, 15mm et 35mm (figure 4.11b). Leur rôle consiste à mettre en valeur le découplage thermique crée par la formation de la lame d'air.

Trois thermocouples **T0**, **T15** et **T50** sont situés le long d'un tirant aux distances respectives de l'intrados de la plaque en acier : 0mm, 15mm et 50mm, afin de caractériser le pont thermique provoqué par le tirant (figure 4.11b).

Quatre thermocouples pour l'acquisition des températures à la surface de la plaque en acier chauffée sont disposés au centre de l'élément **P0**, et sur la direction portée par la diagonale centre-tirant : **P120** à 120mm, **P240** à 240mm et **PT** à l'aplomb du tirant (figure 4.11a). L'objectif est de vérifier l'homogénéité de la température surfacique.

Enfin, deux thermocouples sont placés au centre de l'élément et à l'aplomb du tirant (respectivement **R0** et **RT**) pour la régulation de la consigne en température comme l'indique la figure 4.11a.

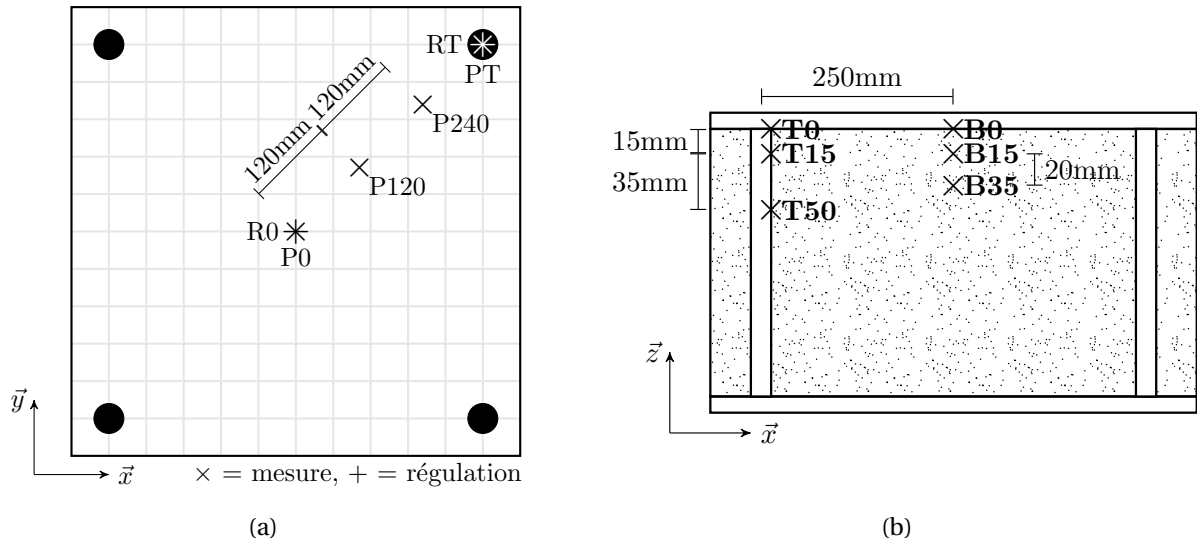


FIGURE 4.11: Position des thermocouples : Vue du dessus (a), Coupe au centre (b)

## 2.3 Système de chauffage

Le chargement thermique imposé à l'élément testé doit être représentatif du cas de l'accident grave décrit par la figure 1.5a. Le voilement thermique étant supposé se déclarer pendant la phase de montée en température, seule cette dernière est réalisée. Ainsi, on cherche à chauffer la plaque exposée du spécimen à 180°C en 15 min environ.

Le système de chauffage doit assurer cette consigne. La température de surface est recherchée la plus homogène possible afin de rester dans le cas isotherme et de correspondre au phénomène réel dans lequel l'élévation de la température est due à la condensation de la vapeur d'eau sur la paroi. Le chauffage doit par ailleurs rester local et ne pas chauffer le support expérimental en acier pour éviter que celui-ci ne se dilate. Le système de chauffage doit également laisser suffisamment de visibilité afin que les mesures par LVDT et par stéréocorrélation puissent être effectuées.

Les techniques de chauffage par lampes radiantes [Booth *et al.*, 2007], matelas chauffant [Müller, 2013] ne satisfaisant pas à ces critères, nous avons opté pour des résistances chauffantes flexibles. Ce sont des éléments souples pourvus d'une gaine en caoutchouc siliconé d'une épaisseur de 0.5mm environ. Elles sont fixées à l'élément chauffé à l'aide d'un silicone<sup>5</sup> résistant à 300°C. Le mouchetis nécessaire à la stéréocorrélation est réalisé sur la gaine des résistances chauffantes. Les dimensions de ces dernières (300 × 610 × 0.5mm<sup>3</sup>) imposent l'utilisation de deux éléments chauffants pour couvrir la plaque de chaque spécimen testé. Afin de permettre une mesure ponctuelle par les LVDTs directement au contact de la plaque, les deux résistances souples sont espacées de 2mm au centre de la plaque chauffée.

5. La référence du produit utilisé est : GE - RTV 108 Momentive

### 2.3.1 Algorithme d'identification de la puissance nécessaire

Les caractéristiques des résistances chauffantes sont calculées à l'aide de simulations numériques dans lesquelles le système expérimental est modélisé. Le chargement imposé au modèle consiste en un flux thermique appliqué à l'ensemble de la plaque et un flux correctif supplémentaire imposé au niveau des tirants.

L'intensité des flux thermiques est calculée à l'aide d'une procédure itérative inspirée d'une méthode de Newton. Pour ce faire, on introduit à chaque instant  $\tau_n$  du problème temporel un critère de convergence constitué du résidu  $r_i^{\text{th}^n} = T_i^n - T_{\text{ref}}^n$  entre la température désirée de la consigne  $T_{\text{ref}}^n$  et la température obtenue à une itération  $i$  donnée  $T_i^n$ .

Soit  $\underline{\varphi} = \varphi \underline{z}$  le flux surfacique imposé normal à la surface chauffée. Alors le résidu se réécrit en fonction de  $\varphi$  :  $r_i^{\text{th}^n}(\varphi_i^n, \tau_n) = T_i^n(\varphi_i^n, \tau_n) - T_{\text{ref}}^n(\varphi_i^n, \tau_n)$  sur lequel on réalise un développement de Taylor autour de  $\varphi_i^n$ . Il vient alors  $r_i^{\text{th}^n} = r_{i-1}^{\text{th}^n} + \frac{\partial r_{i-1}^{\text{th}^n}}{\partial \varphi_{i-1}^n} (\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n)$ . On introduit alors la quantité  $K_{i-1}^n = \frac{\partial r_{i-1}^{\text{th}^n}}{\partial \varphi_{i-1}^n} = \frac{\partial T_{i-1}^n}{\partial \varphi_{i-1}^n}$ . La condition  $r_i^{\text{th}^n} = 0$  permet enfin d'écrire le problème itératif à résoudre à chaque instant :

$$\varphi_i^n = (K_{i-1}^n)^{-1} (T_{\text{ref}}^n - T_{i-1}^n) + \varphi_{i-1}^n \quad (4.14a)$$

avec

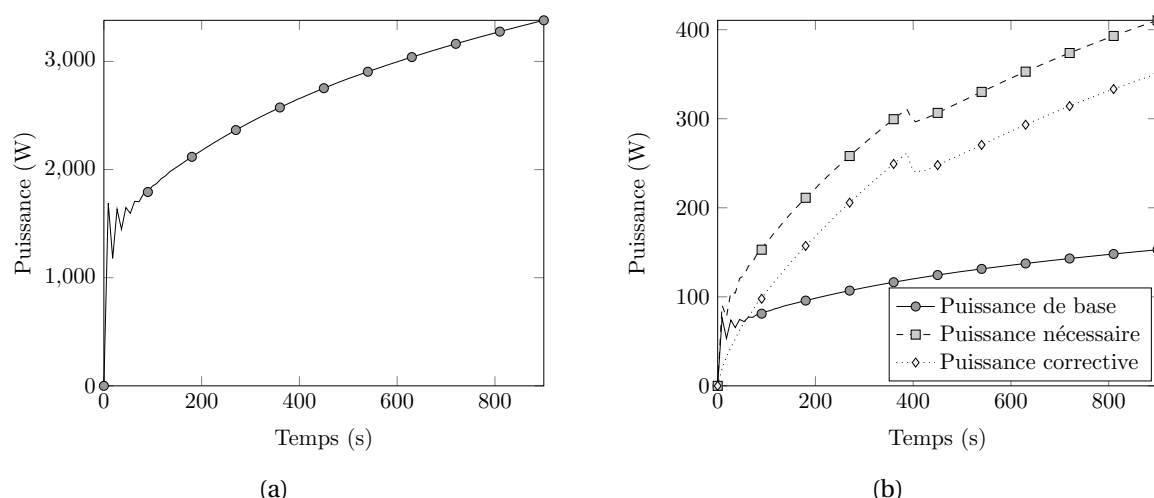
$$K_{i-1}^n = \frac{T_{i-1}^n - T_{i-2}^n}{\varphi_{i-1}^n - \varphi_{i-2}^n} \quad (4.14b)$$

### 2.3.2 Conséquences sur le choix des résistances

La résolution du problème (4.14) permet d'obtenir les puissances théoriques nécessaires pour assurer la consigne au centre de la plaque (figure 4.12a) et la correction à ajouter à l'aplomb du tirant (figure 4.12a).

Les éléments chauffants retenus remplissant les critères théoriques sont choisis dans la gamme SRF OMEGALUX® du fournisseur OMEGA. Plus précisément, une paire d'éléments flexibles SRFG1224/5 de dimensions  $250 \times 610 \text{ mm}^2$ , capables de délivrer une puissance de 1500W chacun<sup>6</sup>, est utilisée pour chauffer l'ensemble de la plaque. Les quatre résistances d'appoint pour compenser le puits thermique causé par les tirants sont des SRFR10/10 circulaires pouvant délivrer jusqu'à 465W chacune.

6. Ce qui permet d'assurer un chauffage jusqu'à au moins  $150^\circ\text{C}$ , a priori suffisant pour provoquer le voilement des éléments testés dans des conditions idéales. Nous n'avons pas pu trouver parmi les fournisseurs d'éléments flexibles capables de délivrer des puissances supérieures



**FIGURE 4.12:** Puissances théoriques nécessaires pour assurer la consigne en température : résistances de base  $300 \times 610$  (a), résistances circulaires d'appoint aux tirants  $\text{Ø}200$  (b)

## 2.4 Synthèse

On présente ici les protocoles de montage et expérimental. Le montage est réalisé suivant cinq étapes successives. Il est nécessaire de laisser au mortier au moins deux jours de séchage avant de procéder à l'essai.

### 2.4.1 Montage de l'essai

Dans un premier temps, il convient de positionner l'élément testé au centre du système de bridage inférieur. On dispose les résistances chauffantes sur la tôle métallique du spécimen après avoir soudé les thermocouples nécessaires.

Les résistances d'appoint surplombent les résistances délivrant la puissance de base comme l'illustre la figure 4.13a (i).

On vient ensuite positionner les plats métalliques rainurés dans lesquels l'isolant est inclus au préalable. Il convient à cet instant de serrer les vis M12 du cadre inférieur pour empêcher toute rotation des plats métalliques ultérieurement (figure 4.13b) (ii).

On réalise ensuite l'étanchéité à l'aide de planches en bois (figure 4.13c) (iii).

Il convient alors de placer le cadre HEB. Une fois cette étape franchie (figure 4.13d), il faut dans l'ordre : serrer les vis M10 des plats rainurés pour supprimer le jeu entre l'isolation thermique et le bord du spécimen testé puis couler le mortier de scellement (iv).

On met finalement en place le support des appareils photos pour la stéréo-corrélation puis les LVDTs à l'image de la figure 4.13e (v). La figure 4.14 offre une vision du montage une fois achevé.

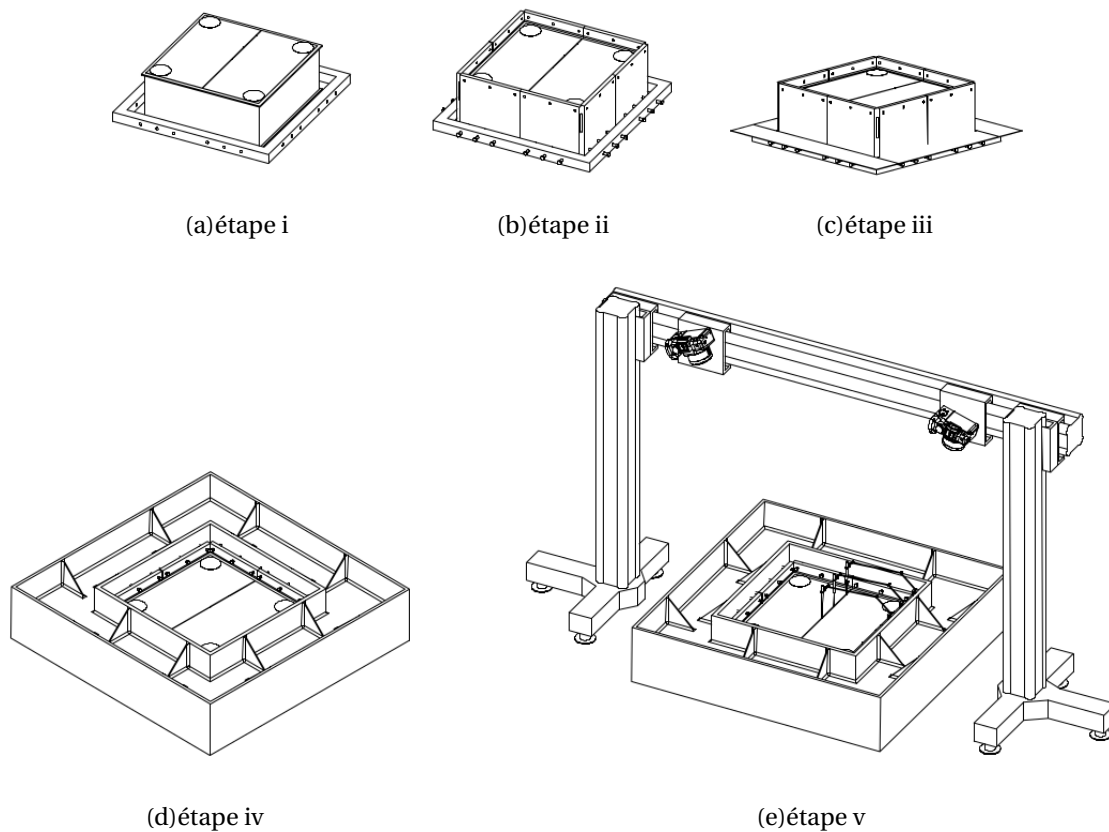


FIGURE 4.13: Étapes intermédiaires de montage

### 2.4.2 Protocole expérimental

Le protocole expérimental tient compte de l'ensemble des remarques effectuées au cours de la présente partie. Il se déroule en trois temps :

- Étalonnage pour la stéréo-corrélation : avant de mettre en place les LVDTs, il convient de positionner les mires planes présentées par la figure 4.9 et de prendre le système en photo. Le mouchetis doit avoir été réalisé au préalable (de préférence une journée avant l'essai pour que la peinture sèche correctement).
- Montée en température : les mires sont retirées et les LVDTs positionnés. La montée en température se fait à l'aide des résistances chauffantes avec une vitesse de  $0.2^{\circ}\text{C s}^{-1}$ . L'acquisition des déplacements se fait à partir des LVDTs uniquement et l'acquisition des thermocouples est lancée.
- Refroidissement : le système est naturellement refroidi par arrêt des résistances chauffantes. Des photos de l'essai sont prises simultanément toutes les 10 secondes, par les deux appareils. Un ventilateur est actionné afin d'homogénéiser les indices de réfraction de l'air et de contribuer au refroidissement.



La montée en température peut éventuellement être renouvelée après voilement pour observer la réponse en partant d'une configuration déformée de la voile chauffée.

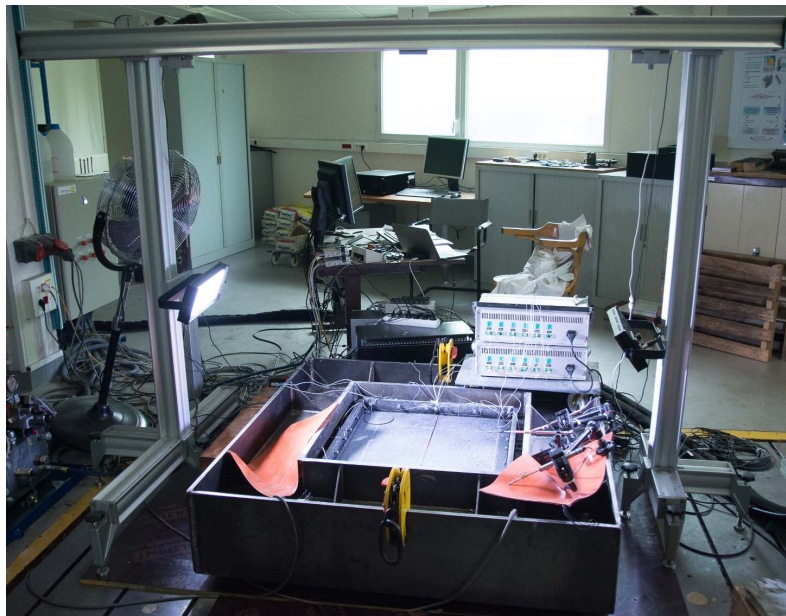


FIGURE 4.14: Montage expérimental

Le spécimen est retiré à la fin du test par l'application d'un effort mécanique au centre de la plaque testée, où en détruisant le mortier de scellement.

### 3 Réalisation de la campagne expérimentale

La dernière partie du chapitre IV est consacrée à la présentation des observations réalisées et résultats expérimentaux obtenus lors des essais.

Compte tenu du calendrier, du verre trempé fut utilisé pour l'isolation thermique lors des essais **SPE83(a)**, **SPE83(b)** et **SPE50D**. L'isolation thermique des essais **SPE83(c)**, **SPE83D**, **SPE66** et **SPE50** fut réalisée à l'aide de la résine thermodurcissable KV<sup>®</sup> 3eco.

Dans un premier paragraphe, on présente les observations effectuées pour chaque essai réalisé. Une synthèse des résultats (température critique et déplacements) est proposée en fin de paragraphe. Les essais sont reproduits numériquement afin de permettre une confrontation numérique - expérimentale dans un second paragraphe. On calcule également une réponse analytique approchée à partir du modèle détaillé au chapitre III. Enfin, le troisième paragraphe propose quelques suggestions visant à améliorer les essais, faisant suite au retour d'expérience.

### 3.1 Observations et interprétations des mesures

Le présent paragraphe est dédié à la présentation de l'ensemble des données obtenues pour chaque essai accompli. Nous nous focaliserons essentiellement sur les résultats correspondant aux déplacements pré- et post-critique (mesures ponctuelles obtenues via LVDTs et mesures de champ acquises par stéréo-corrélation). Nous reviendrons également sur les valeurs ponctuelles mesurées des températures.

#### 3.1.1 SPE83(a)

Le premier échantillon d'éclatement 83 testé constitua un essai préliminaire. Une seule paire de résistances chauffantes SRFG1224/5 fut alors utilisée pour appliquer le chargement thermique.

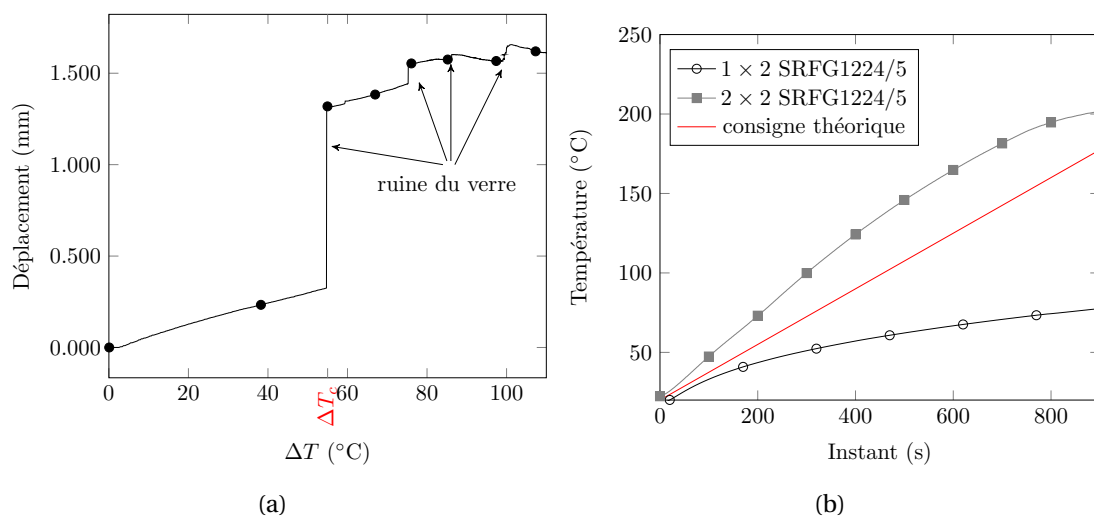


FIGURE 4.15: SPE83(a) : Déplacement L0 (a), Température P0 (b)

**Déplacements :** Lors de la montée en température, nous n'observâmes aucun voilement net de la plaque en acier chauffée. Les déplacements hors-plans restèrent très réduits au cours de l'essai. Toutefois, on note à la lecture du graphique 4.15a des discontinuités dans la réponse se traduisant par des sauts de déplacements. Ces dernières se produisirent simultanément avec la ruine du verre trempé placé aux conditions limites.

Le premier saut observable sur la figure 4.15a correspondrait alors à la température critique lorsque l'instabilité se déclare. La perte de raideur accompagnant la ruine du verre serait alors à l'origine d'une libération des déplacements bridés expliquant l'absence d'amplification de la réponse.

**Températures :** Au cours de l'essai, la puissance injectée à l'aide du système de résistances souples fut clairement insuffisante. Il y eut un retard conséquent de la consigne réelle par

rapport à la consigne théorique comme l'illustre la figure 4.15b. Les transferts thermiques entre la plaque chauffée et un béton moins isolant que prévu, les échanges avec le milieu extérieur négligés dans le modèle numérique et la gaine isolante des résistances chauffantes sont autant d'éléments à l'origine de la sous-estimation de la puissance réelle nécessaire.

Cette difficulté fut partiellement levée en superposant une seconde paire de résistances à la première (figure 4.15b). Cette seconde couche, amovible, fut retirée lors du refroidissement de la plaque afin de ne pas occulter le champ des appareils photos lors de l'acquisition par stéréo-corrélation.

### 3.1.2 SPE83(b)

Ce fut le second essai effectué avec un spécimen d'élanement 83. Du verre trempé assurait le découplage thermique du support et de l'éprouvette testée. L'utilisation de deux couches de résistances chauffantes permit d'atteindre des températures plus élevées, et plus rapidement que pour SPE83(a).

**Déplacements :** L'essai fut réalisé en deux temps. Une première montée en température jusqu'à flambement (montée 1), une descente à température ambiante puis une seconde montée en température (montée 2) partant du spécimen plastifié et déformé du déplacement résiduel précédent.

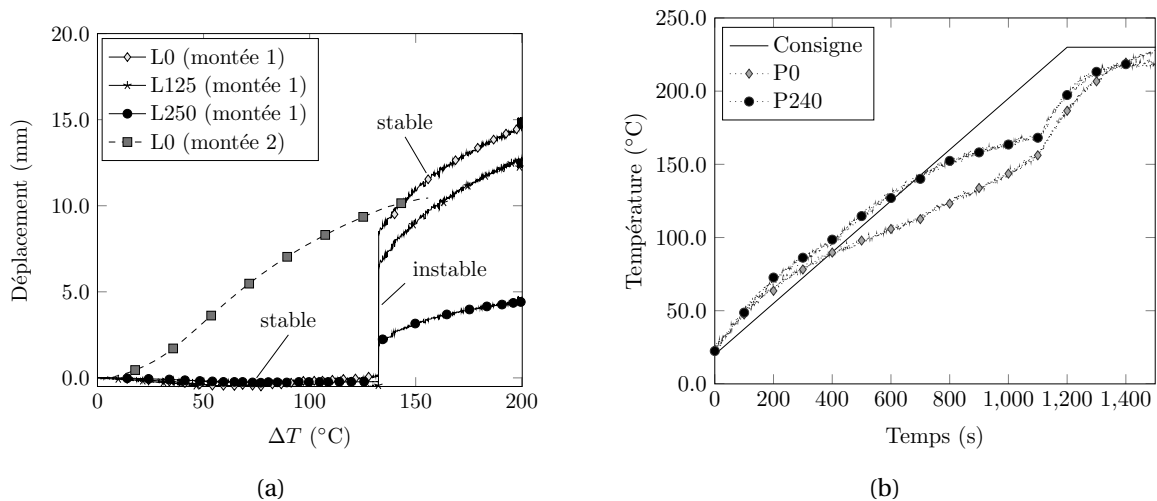
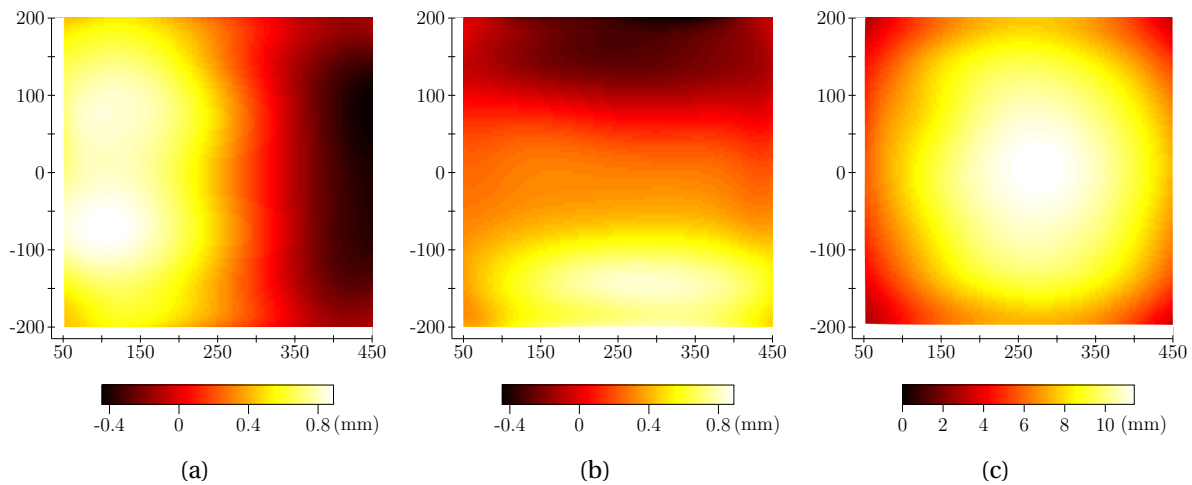


FIGURE 4.16: SPE83(b) : Mesures ponctuelles, déplacements (a), températures (b)

Deux régimes furent observés lors de la première montée en température : stable puis post-critique. En effet, la figure 4.16a témoigne d'un important saut de déplacement (+8.3mm) à  $\Delta T = 132^\circ\text{C}$  lorsque l'instabilité se déclare. Le déplacement maximum atteint au cours du test vaut  $w_{\max} = 14.6\text{mm}$  pour  $\Delta T = 200^\circ\text{C}$ .

On peut supposer qu'en dépit de sa ruine, les éclats de verre atteignent à cette température un niveau de confinement suffisamment important pour que le voilement se produise. La forme du comportement post-critique correspond alors au comportement théorique en  $\sqrt{\zeta_2 \Delta T + \zeta_3}$  développé au chapitre III.

Les résultats obtenus par stéréo-corrélation lors de la décharge confirment un voilement en mode I et permettent d'estimer le déplacement résiduel  $w_{\max} - w_{\text{SDIC}} = 4.2\text{mm}$  (figure 4.17c). Les champs des déplacements plans suggèrent un bridage imparfait des déplacements avec une résultante valant 0.4mm dans les directions  $\vec{x}$  (figure 4.17a) et  $\vec{y}$  (figure 4.17b).



**FIGURE 4.17:** SPE83(b) : Champs de déplacement DX (a), DY (b), DZ (c)

La seconde montée en température, en partant de la configuration déformée, permet d'acquérir l'ensemble de la réponse en déplacement qui devint continue (voir figure 4.16a). L'amplitude fut cependant réduite suite à la plastification de la tôle testée.

**Températures :** Jusqu'à 90°C, la consigne théorique est correctement assurée au centre de la plaque et à 250mm du centre, dans la diagonale centre-connecteur (figure 4.16b). À partir de 90°C, la consigne n'est alors plus assurée au centre de la plaque. L'écart entre les deux températures relevées augmente alors jusqu'à ce que le voilement se déclare ( $\tau = 1100\text{s}$ ). La cinématique thermique change alors (figure 4.16b), la température augmentant rapidement suite à la formation à l'interface tôle-béton d'une lame d'air isolante.

### 3.1.3 SPE83(c)

La conception de l'essai pour ce spécimen d'élancement 83 faisait intervenir la résine thermodurcissable KV<sup>®</sup> 3eco. Cet essai fut le dernier réalisé chronologiquement. En l'absence d'éléments chauffants adéquats, des éléments de substitution<sup>7</sup> furent utilisés pour

7. Stock de résistances chauffantes non conformes aux spécifications exigées.

cet essai uniquement.

**Déplacements :** En dépit du changement de conditions limites, les observations furent sensiblement identiques à celles réalisées lors de l'essai SPE83(b).

Le caractère instable de la réponse apparaît dans la figure 4.18a par un saut de déplacement d'une amplitude de 14.1mm à  $\Delta T = 148^\circ\text{C}$ . Le déplacement maximal mesuré vaut  $w_{\max} = 16.5\text{mm}$  à  $\Delta T = 152^\circ\text{C}$  et correspond à la course maximale du LVDT.

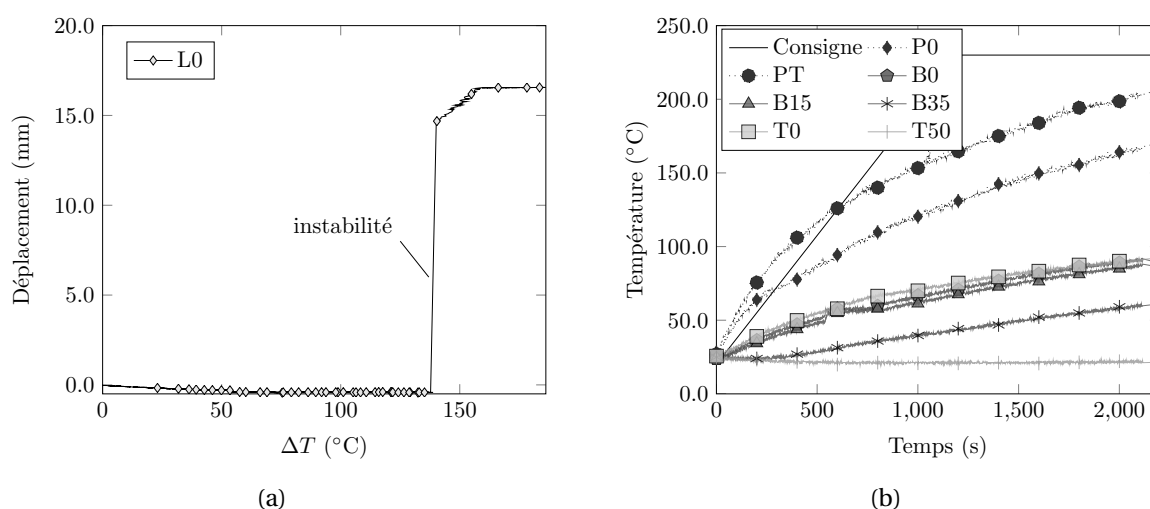


FIGURE 4.18: SPE83(c) : Déplacements ponctuels (a), Températures ponctuelles (b)

**Températures :** Les éléments chauffants de substitution utilisés pour cet essai ne permirent pas d'assurer la consigne en température au-delà de  $60^\circ\text{C}$  (figure 4.18b). Par ailleurs, les éléments chauffants furent portés au-delà de leur température de fonctionnement et brûlèrent le mouchetis, rendant impossible toute mesure du déplacement résiduel à l'aide de la stéréo-corrélation.

Les températures mesurées dans l'épaisseur de l'élément (B0, B15, B35, T0 et T50) sont largement plus faibles que les températures de surface. Cette observation suggère une interface imparfaite entre plaque chauffée et béton, même en absence de voilement. On retrouve ici un phénomène rapporté au paragraphe 2.3.2 du chapitre II [Yovanovich *et al.*, 1997, Ghajel, 2004]. Il convient de remarquer que la température au capteur T0 est légèrement supérieure à celle mesurée au capteur B0, ce qui confirme le pont thermique causé par le connecteur qui agit comme une ailette et qui est rapidement refroidi par le béton.

### 3.1.4 SPE83D

Le specimen SPE83D d'élancement 83 testé présentait un défaut d'affleurement de 2mm. L'isolant KV<sup>®</sup> 3eco fut utilisé. Le voilement fut correctement observé au cours de l'essai (figure 4.19a).



FIGURE 4.19: SPE83D : voilement à l'issu de l'essai

**Déplacements :** L'essai se déroula conformément aux attentes. Le déplacement mesuré à l'aide des LVDTs est continu (figures 4.20a) et ne présente pas de discontinuités similaires aux cas des plaques planes (figures 4.18a et 4.18a).

On observe dans la figure 4.20a deux régimes de fonctionnement. Le premier, pré-critique, est linéaire et traduit une amplification du défaut d'affleurement en flexion. Ce résultat rejoint les études numériques réalisées au chapitre III caractérisant l'influence d'une imperfection géométrique sur la réponse (figure 3.23). Le second régime, post-critique, correspond à l'amplification rapide du déplacement correspondant à une fonction dont la forme est donnée par  $\sqrt{\zeta_2 \Delta T + \zeta_3}$ . Le défaut régularise la réponse qui se présente comme un comportement stable.

Il apparaît sur la figure 4.20a que la déformée s'amplifie plus brutalement à partir d'une température critique  $\Delta T_{\text{crit}} = 106^\circ\text{C}$ , en retard de  $50^\circ\text{C}$  par rapport au cas théorique idéal. Le déplacement maximal atteint à  $\Delta T = 200^\circ\text{C}$  vaut 12.5mm.

4.21c).

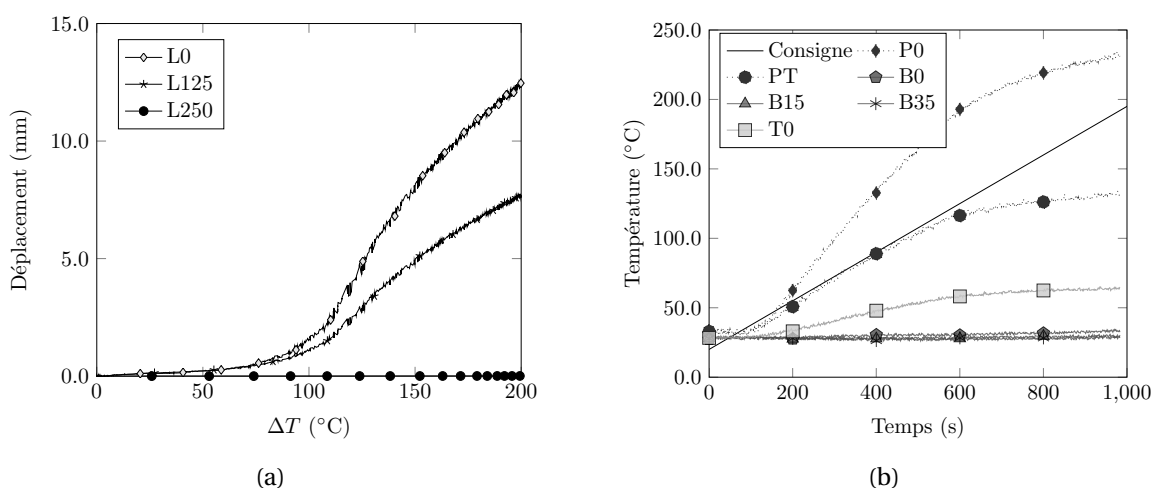


FIGURE 4.20: SPE83D : Mesures ponctuelles, déplacements (a), températures (b)

L'étude des champs de déplacements montre que le défaut d'affleurement est à l'origine d'une perte de symétrie de la réponse dans la direction orthogonale au défaut (figure 4.21a). Par ailleurs, les champs de déplacements plans suggèrent un bridage imparfait des déplacements avec des résultantes valant 0.4mm dans la direction  $\vec{x}$  (figures 4.21a) et 0.5mm dans la direction  $\vec{y}$  (figure 4.21b).

Les résultats obtenus par stéréo-corrélation lors de la décharge confirment un voilement en mode I et permettent d'estimer le déplacement résiduel  $w_{\max} - w_{\text{SDIC}} = 2.2\text{mm}$  (figure 4.21c).

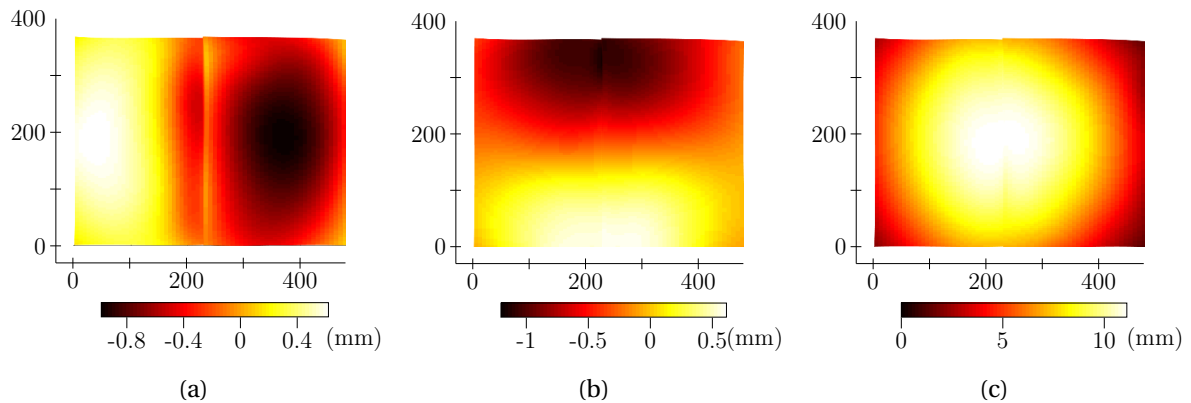


FIGURE 4.21: SPE83D : Champs de déplacement DX (a), DY (b), DZ (c)

**Températures :** La figure 4.20b montre que la consigne fut largement assurée au cours de l'essai grâce à la lame d'air de 2mm créée par le défaut d'affleurement. Cependant, le thermocouples PT placé à l'aplomb du connecteur mesura une température bien plus faible que celui au centre de la plaque. On retrouve ici l'effet de puits thermique causé par le connecteur, la puissance injectée n'étant pas suffisante. Il en résulte une forte inhomogénéité de la température surfacique qui, en plus du bridage imparfait, contribue à l'augmentation de la température critique selon les résultats théoriques présentés par la figure 3.17.

Enfin, la résistance thermique à l'interface acier-béton procurée par la lame d'air initiale suffit à conserver le béton à température ambiante au cours de l'essai (figure 4.20b).

### 3.1.5 SPE66

Les conditions limites d'isolation thermique furent assurées à l'aide de la résine KV<sup>®</sup> 3eco pour ce spécimen d'élancement 66.

**Déplacements :** Les observations sont sensiblement identiques à SPE85(b) et SPE85(c). Le caractère instable de la réponse se manifeste dans la figure 4.22a par un saut de déplacement d'une amplitude de 7.8mm à  $\Delta T = 139^\circ\text{C}$ . Le déplacement maximal mesuré vaut  $w_{\max} = 13.3\text{mm}$  à  $\Delta T = 200^\circ\text{C}$ .

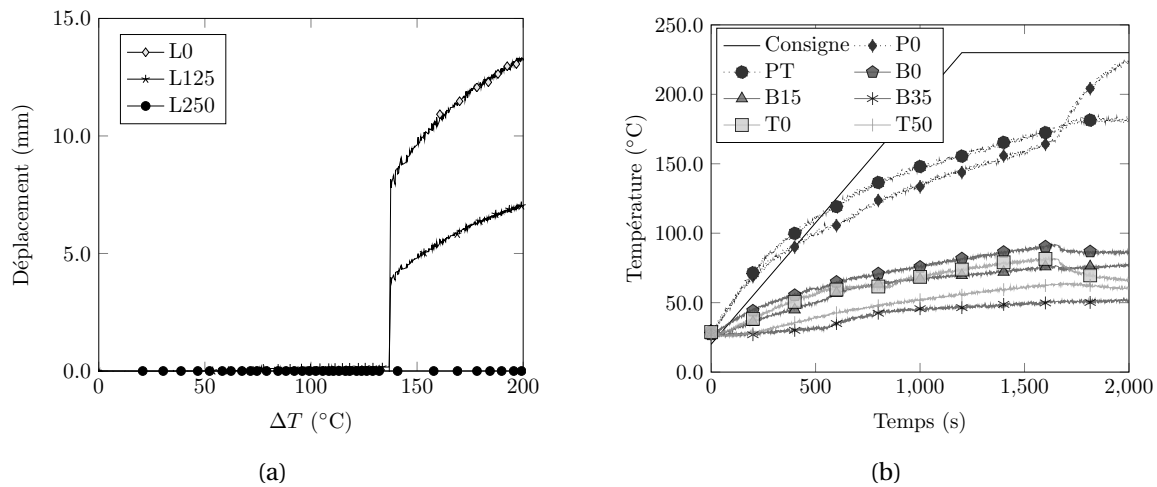


FIGURE 4.22: SPE66 : Mesures ponctuelles, déplacements (a), températures (b)

Les résultats obtenus par stéréo-corrélation lors de la décharge confirment un voilement en mode I et donnent  $w_{\max} - w_{\text{SDIC}} = 3.7\text{mm}$ .

**Températures :** Les éléments chauffants ne permirent pas d'assurer la consigne en température au-delà de 95°C (figure 4.22b).

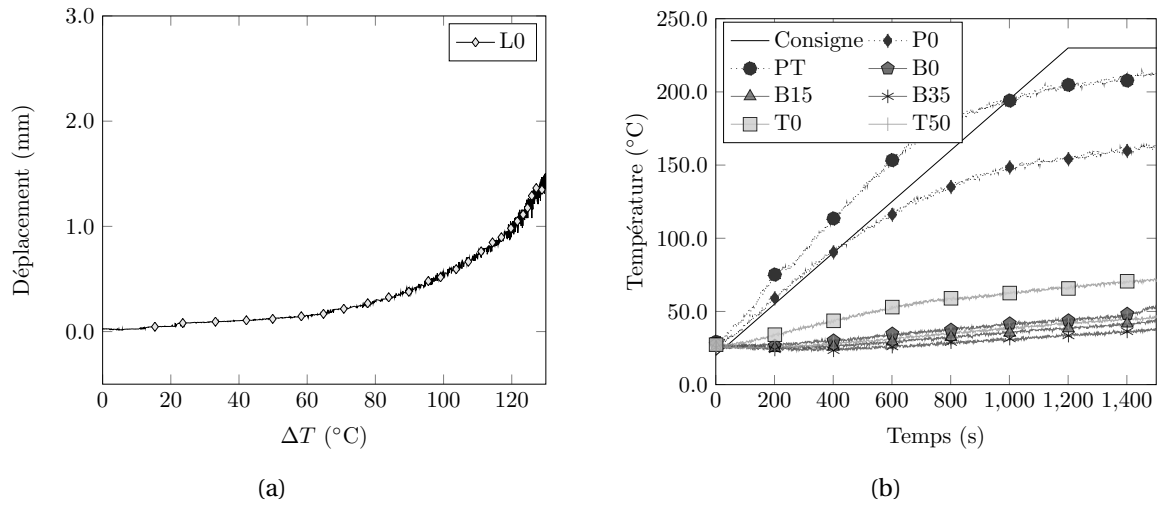
Les températures mesurées dans l'épaisseur de l'élément (B0, B15, B35, T0 et T50) sont largement plus faibles que les températures de surface. On remarque dans la figure 4.22b une modification de la cinématique thermique sur B0 et T0, caractérisée par une baisse de la température. Ce comportement correspond à l'amplification de la lame d'air en régime post-critique.

### 3.1.6 SPE50

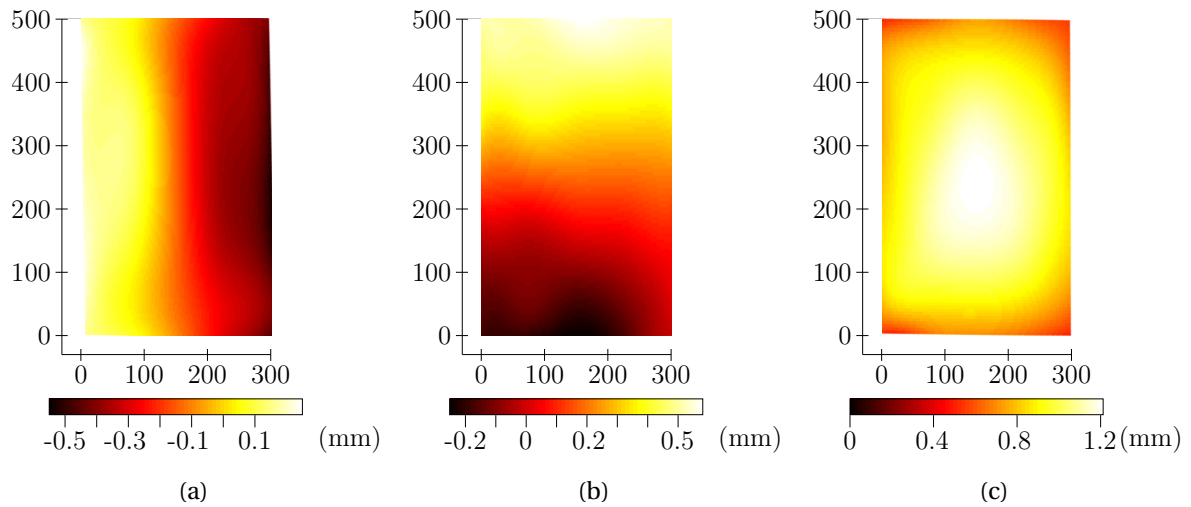
La résine KV<sup>®</sup> 3eco fut utilisée pour assurer les conditions limites d'isolation thermique pour cet essai sur le spécimen d'élancement 50.

Le voilement s'amorça mais les amplitudes des déplacements restèrent faibles. Le déplacement mesuré atteignit 1.6mm à  $\Delta T = 120^\circ\text{C}$  (figure 4.23a). Compte tenu de l'épaisseur de la tôle d'acier chauffée (10mm), le système de résistance ne suffit pas à assurer la consigne en température et les températures maximales atteintes furent plus faibles que lors des essais SPE83(b), SPE83(c) et SPE66 (figure 4.23b).





**FIGURE 4.23:** SPE50 : Mesures ponctuelles, déplacements (a), températures (b)



**FIGURE 4.24:** SPE50 : Champs de déplacement DX (a), DY (b), DZ (c)

Les champs de déplacements plans issus de la stéréo-corrélation suggèrent un bridage imparfait des déplacements avec des résultantes valant 0.4mm dans la direction  $\vec{x}$  (figure 4.24a) et 0.3mm dans la direction  $\vec{y}$  (figure 4.24b).

Les résultats obtenus par stéréo-corrélation lors de la décharge confirment une déformée dans un mode de flexion. On calcule le déplacement résiduel  $w_{\max} - w_{\text{SDIC}} = 0.4\text{mm}$  (figure 4.24c).

### 3.1.7 SPE50D

Lors de cet essai, du verre trempé fut utilisé pour assurer l'isolation thermique aux bords de l'élément ( $\varphi = 50$  avec défaut) testé.

Le voilement de la plaque ne fut pas apparent lors de l'essai en dépit d'un chargement thermique conforme aux spécifications (figure 4.25b) suite à la présence de la lame d'air initiale. Les capteurs indiquèrent un déplacement négatif au centre, nul à 250mm du centre et positif à 125mm du centre (figure 4.25a). Les déplacements négatifs au centre s'expliquent par le glissement au niveau du joint de soudure du LVDT initialement placé sur la plaque la plus haute.

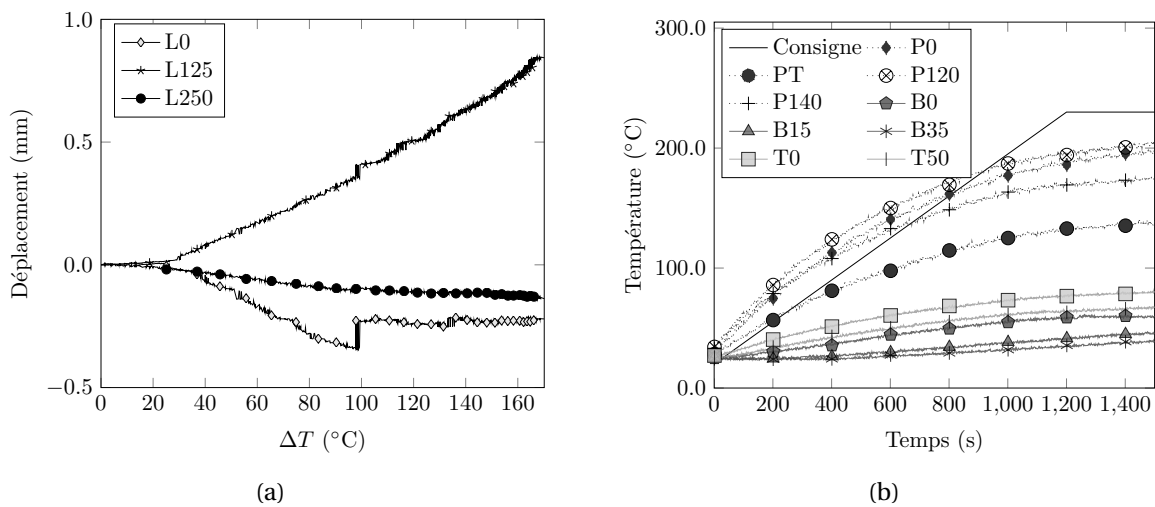


FIGURE 4.25: SPE50D : Mesures ponctuelles, déplacements (a), températures (b)

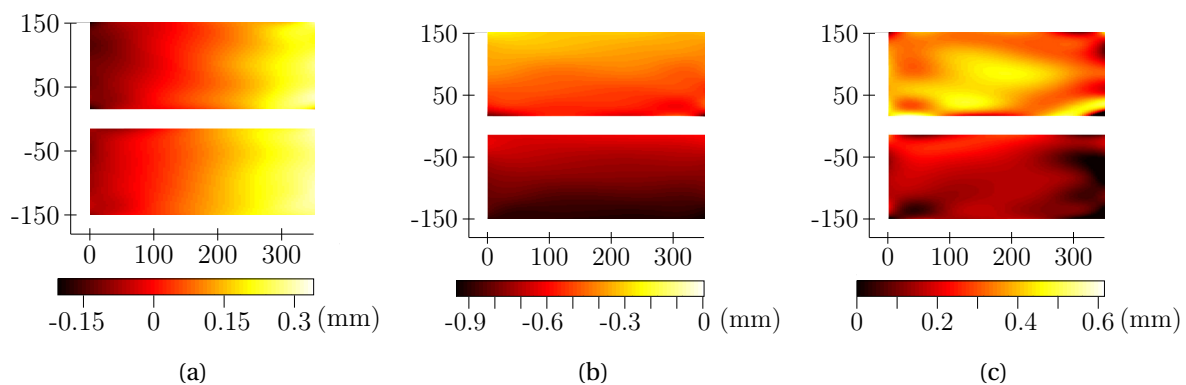


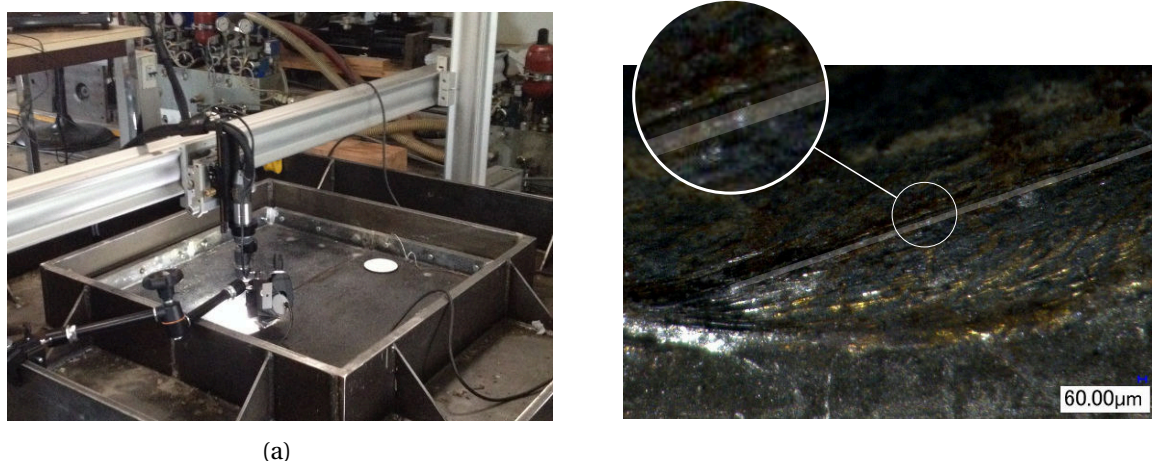
FIGURE 4.26: SPE50D : Champs de déplacement DX (a), DY (b), DZ (c)

Les déplacements, plus importants au niveau du capteur L125 que du pointeau L0, suggèrent que la déformée ne correspond pas au mode de voilement attendu. Le champ de dé-

placement mesuré par stéréo-corrélation confirme cette hypothèse en montrant que seule la demi-plaque à l'origine du défaut d'affleurement présente une déformée hors plan (figure 4.26c). L'allure de la réponse mesurée par L125 (figure 4.25a) s'apparente plus à une déformation de flexion qu'à du voilement.

La donnée des déplacements plans atteste d'un très mauvais bridage des déplacements dans la direction  $\vec{y}$  orthogonale à la soudure (figure 4.26b). Le bridage, bien qu'imparfait fut mieux assuré dans la seconde direction  $\vec{x}$  (figure 4.26a). L'ensemble des plaques de verre fut brisé rapidement.

Un examen après essai de la soudure à l'aide d'un microscope KAYENCE monté sur l'essai (photo 4.27a) révéla la présence de nombreuses imperfections au niveau du joint de soudure, causant un affaiblissement de l'interface entre les deux demi-plaques. La photo 4.27b donne un exemple de fissure s'amorçant à l'interface du joint de soudure et de la plaque inférieure remontant ensuite dans le cordon de soudure.



**FIGURE 4.27:** SPE50D : Montage du Kayence (a), fissure dans le joint de soudure  $\times 50$  (b)

Aucun contrôle des soudures n'ayant été réalisé au préalable de l'essai, nous ne pouvons pas certifier que les fissures soient apparues au cours du test. Une raideur diminuée au niveau de la soudure peut expliquer la diminution du bridage en déplacement dans la direction  $\vec{y}$ .

### 3.1.8 Synthèse

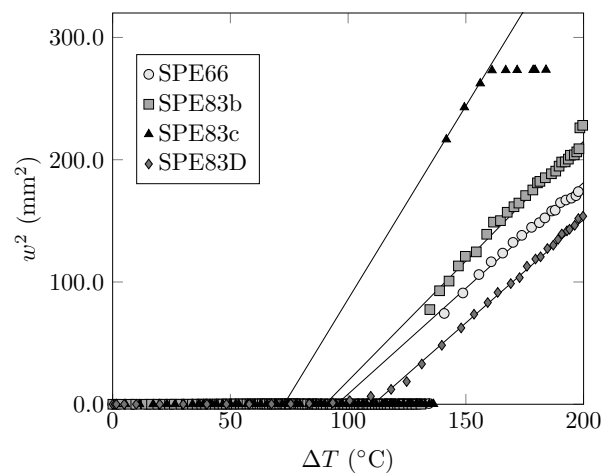
Parmi les essais réalisés, le voilement de la plaque chauffée a été observé dans son premier mode pour les spécimens SPE66, SPE83b, SPE83c et SPE83D. Le spécimen SPE50, n'a pas flambé mais le phénomène s'est amorcé et l'instabilité se serait sans doute déclarée si la plaque avait pu être portée à plus haute température. Le spécimen SPE50D présente une réponse difficilement qualifiable de voilement suite à un mauvais bridage dans le sens orthogonal à la soudure pouvant être imputé à l'état du joint de soudure. Le spécimen SPE83a

présente un saut de déplacement pouvant correspondre à l'instabilité mais l'incapacité à monter alors la plaque en température n'a pas permis de capter la réponse post-critique.

A l'exception des spécimens avec défaut, la consigne en température théorique désirée n'a jamais pu être convenablement assurée avec le système de résistance souple. Seule la lame d'air initiale des spécimens avec imperfection géométrique permet d'assurer la consigne (figure 4.20b). Ceci est rendu possible par l'isolation thermique de la tôle chauffée par rapport au béton.

Au cours des essais, avant voilement, la température surfacique de la plaque chauffée est moins élevée au centre de la plaque (P0) qu'au centre du tirant (PT). Ce phénomène s'explique par le puits thermique que réalise le connecteur et les résistances circulaires d'appoint placées à son niveau. En régime post-critique, la température ressentie en P0 augmente brutalement jusqu'à dépasser éventuellement celle de PT selon l'amplitude du déplacement hors-plan (figure 4.22b). Ces observations révèlent que le champ de température surfacique est fortement hétérogène au cours de chaque essai.

La durée des essais n'excédant jamais 40 min, la température dans l'épaisseur du remplissage béton reste faible (inférieure à 100°C) grâce aux propriétés thermiques du matériau et à la résistance thermique procurée par l'interface plaque-béton, même en absence de voilement.



**FIGURE 4.28:** Détermination de la température critique à partir des données expérimentales

En présence de spécimen avec défaut, l'intégralité de la réponse a pu être suivie par les capteurs de déplacement (figure 4.20a). En présence de plaques chauffées planes, la réponse n'est pas continue, un saut de déplacement important marque la rupture entre deux régimes stables et caractérise un état instable (figure 4.16a). Le défaut permet donc de régulariser la réponse en déplacement. Par ailleurs, quel que soit l'état de surface de la plaque, l'allure de la réponse en déplacement en régime post-critique correspond à la forme théorique développée au chapitre III :  $w = \sqrt{\zeta_2 \Delta T + \zeta_3}$ . On peut alors obtenir la température critique définie au sens théorique  $\Delta T_{\text{crit}} = -\zeta_2/\zeta_3$  en réalisant une régression linéaire sur  $(\Delta T, w^2)$  comme

l'illustre la figure 4.28. La table 4.12 donne les valeurs de chaque grandeur ainsi que du coefficient de corrélation  $r_{\text{val}}$  de la régression linéaire.

L'analyse des champs de déplacement obtenus via stéréo-corrélation a mis en valeur la nature imparfaite des bridages en déplacements. L'acquisition par stéréo-corrélation ayant été faite durant le refroidissement, il est possible de calculer le déplacement résiduel par confrontation avec la valeur obtenue au centre par les LVDTs. La valeur donnée par le capteur L0 peut être légèrement inférieure à l'amplitude réelle (erreur de positionnement du capteur, voilement imparfaitement centré suite au gradient de déplacements plans non nuls). La quantité  $w_r/w_{\text{max}}$  calculée dans la table 4.12 constitue donc un majorant du poids de la plasticité.

**TABLE 4.12:** Résultats expérimentaux - voilement thermique local

		SPE50	SPE50D	SPE66	SPE83(a)	SPE83(b)	SPE83(c)	SPE83D
$w_{\text{max}}$	(mm)	1.6	0.9	13.3	1.6	14.6	16.5	12.5
$w_r$	(mm)	0.4	0.2	3.7	—	4.2	—	2.2
$\frac{w_r}{w_{\text{max}}}$	(%)	25	25	28	—	29	—	18
$u_x$	(mm)	0.4	0.15	0.4	—	0.4	—	0.4
$u_y$	(mm)	0.3	0.9	0.5	—	0.4	—	0.5
$\zeta_2$	(mm <sup>2</sup> °C <sup>-1</sup> )	—	—	1.73	—	1.96	3.16	1.69
$\zeta_3$	(mm <sup>2</sup> )	—	—	-164.67	—	-176.9	-230.0	-187.0
$r_{\text{val}}$		—	—	0.99	—	0.99	0.97	1.00
$\Delta T_{\text{crit}}$	(°C)	> 120	—	95	58	90	73	110

Les spécimens SPE33 et SPE45 n'ont pas été testés : compte tenu des résultats pour SPE50, les voilements de SPE33 et SPE45 n'étaient pas supposés se produire étant donné l'impossibilité à assurer la consigne en température.

Pour finir, le silicone utilisé pour fixer les résistances chauffantes à la plaque entraîne des difficultés sanitaires qu'il est nécessaire de mentionner. En effet, bien que sa température de fonctionnement annoncée par le fournisseur soit de 230°C et sa température limite 300°C, en présence de températures supérieures à 150°C, il se dégage des vapeurs de formaldéhydes. La mise en garde ne figurant explicitement que sur le conditionnement du produit, nous avons découvert l'origine des vapeurs tardivement.

### 3.2 Confrontation numérique-analytique-expérimentale

Le présent paragraphe confronte les résultats expérimentaux (**EXP**) avec les calculs numériques cherchant à représenter les essais (**FEM**) et les solutions obtenues analytiquement (**AB\***) avec le modèle (3.41).

### 3.2.1 Description des modèles numériques

Les modèles numériques se basent, pour chaque spécimen, sur les hypothèses présentées au chapitre II. L'ensemble des éléments constitutifs de l'essai est modélisé à l'aide d'éléments hexaédriques, dont les dimensions varient de 5mm pour la tôle du spécimen exposée au chargement, à 20mm pour l'âme du HEB. Le maillage du spécimen testé comprend les deux tôles en acier, le tirant, le remplissage béton et l'élément d'interface (figure 4.29a). Le maillage du bâti expérimental comprend l'isolant modélisé à l'aide d'un comportement élastique dont les caractéristiques sont données par la table 4.11, le mortier modélisé avec un comportement de Mazars, les plats rainurés, cadre inférieur, vis et HEB modélisés à l'aide d'un comportement élasto-plastique avec écrouissage isotrope.

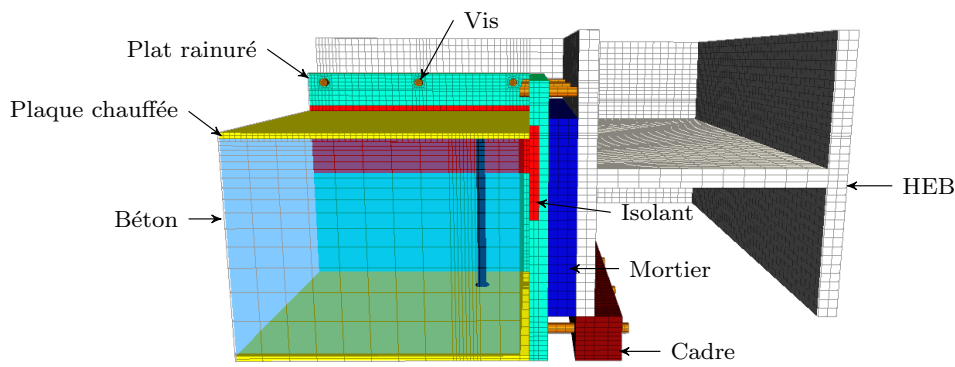


FIGURE 4.29: Maillage représentatif d'un essai de voilement thermique local

Pour limiter les coûts en calcul, des maillages incompatibles sont utilisés dans le béton et à l'interface spécimen-isolant. La continuité des déplacements est alors assurée à l'aide de relations cinématiques.

Le chargement thermique prend la forme d'un flux imposé dont la puissance correspond à celle de deux nappes de résistance SRFG1224/5 superposées. Une correction est apportée au droit du connecteur pour tenir compte des SRFR10/10.

### 3.2.2 Description des modèles analytiques

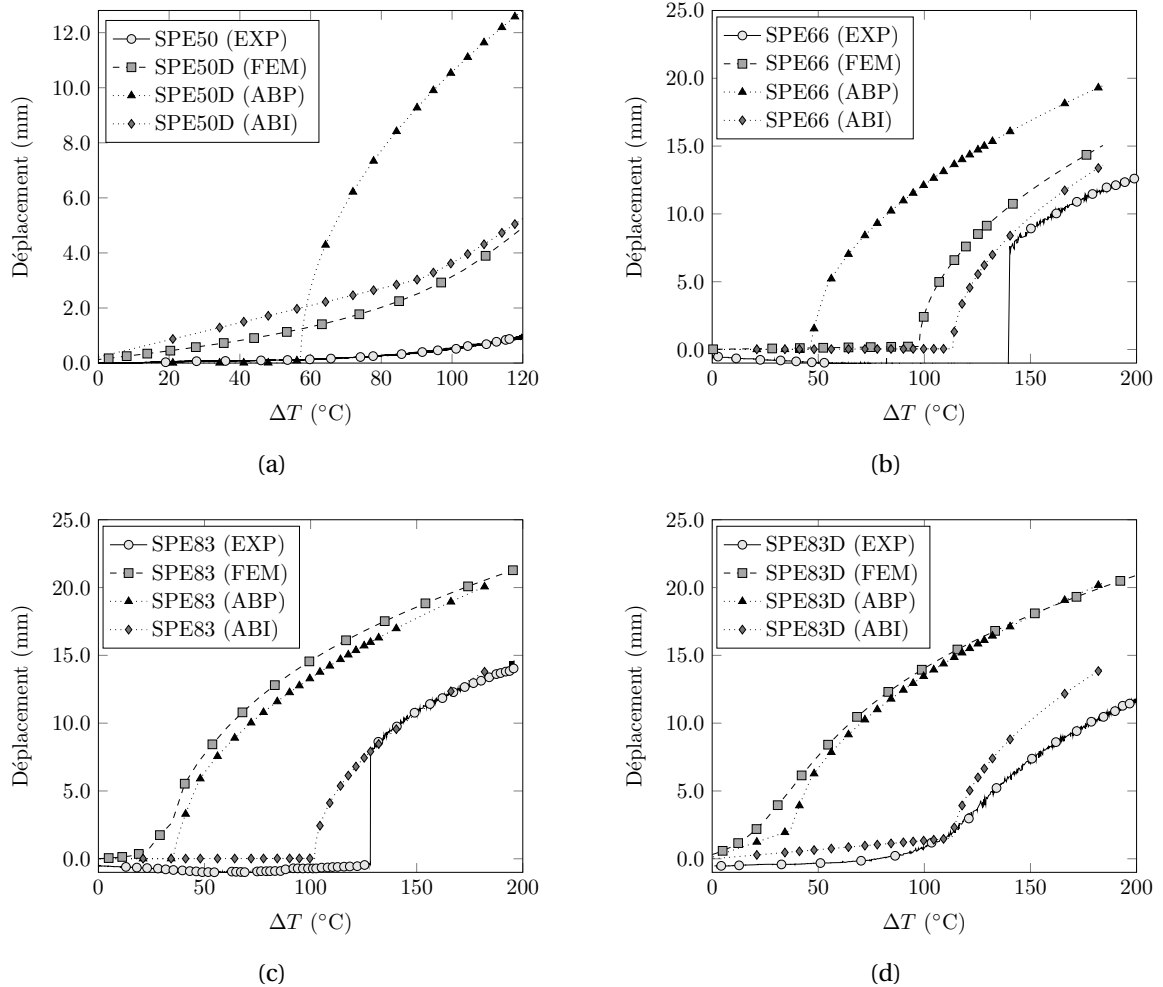
Pour chaque essai, deux modèles analytiques seront réalisés, basés sur les équations (3.41a) à (3.41f).

Le premier modèle noté **(ABP)** correspond à une hypothèse de bridage parfait pour lequel  $K_x^S \rightarrow \infty$  et  $K_y^S \rightarrow \infty$ .

Le second modèle noté **(ABI)** tient compte des déplacements mesurés par stéréocorrélation et répertoriés dans la table 4.12. Dans ce dernier cas on retient  $f = \sigma_y$ ,  $K_x^S = \frac{2f}{u_x}$  et  $K_y^S = \frac{2f}{u_y}$  où  $u_x$  et  $u_y$  sont les résultantes des déplacements plans dans chacune des deux directions et le facteur 2 provient de la symétrie du système dans le problème analytique.

### 3.2.3 Régime post-critique

Le tracé des déplacements au centre de la plaque chauffée montre que le modèle numérique (FEM) ne parvient pas à reproduire fidèlement l'expérience (EXP) pour chacun des spécimens étudiés (figure 4.30). L'hypothèse de bridage parfait ABP est invalide pour l'ensemble des spécimens.



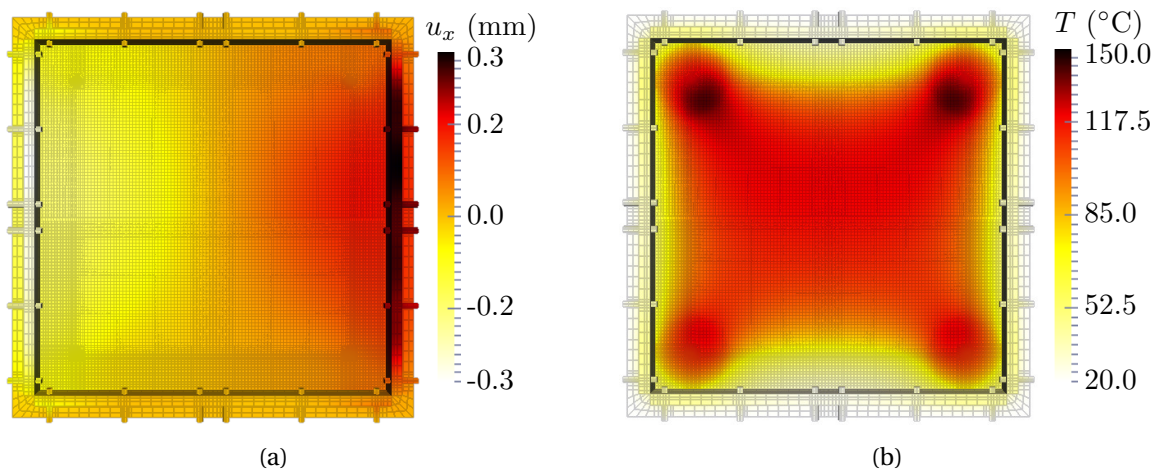
**FIGURE 4.30:** Régimes post-critiques expérimentaux, numériques et analytiques : SPE50 (a), SPE66 (b) SPE83b (c) et SPE83D (d)

En particulier, pour SPE83 et SPE83D (figures 4.30c et 4.30d), les réponses numériques et analytiques avec hypothèses de bridage parfait correspondent pour une température critique de 41 $^{\circ}\text{C}$ . Dans les modèles numériques SPE83 et SPE83D, le flux thermique permet d'assurer la consigne en température contrairement à l'essai réel. Les solutions analytiques dans lesquelles un déplacement aux bords de la plaque est autorisé présentent des comportements comparables à ceux observés au cours des essais (figures 4.30c et 4.30d).



Dans le cas du spécimen SPE66 4.30b, la réponse numérique (FEM) est proche des réponses analytique avec bridage imparfait (ABI) et expérimentale (EXP). La solution issue du calcul analytique avec bridage parfait s'amorce plus tôt.

Enfin, dans le cas de SPE50 4.30a, les solutions analytique (ABI) et numérique (FEM) correspondent tandis que les déplacements réellement observés sont plus faibles (EXP). L'élément n'ayant pas flambé, les déplacements vont continuer de s'accroître, augmentant la température critique. Les valeurs injectées dans le modèle analytique avec bridage imparfait (table 4.12) sont insuffisantes, bien qu'elles correspondent au cas numérique (figure 4.31a).



**FIGURE 4.31:** SPE50D : Champs obtenus par éléments finis, déplacement  $u_x$  (a), température (b)

La prise en compte de la nature imparfaite du bridage réalisé expérimentalement dans la solution analytique permet une meilleure corrélation des réponses analytiques et expérimentales (figure 4.30) en particulier pour les spécimens SPE66 (figure 4.30b) et SPE83 (figure 4.30c). Les écarts sont plus importants avec SPE83D (figure 4.30d), bien que l'allure globale corresponde. Cette observation, associée à la remarque sur la forme du comportement expérimental en régime post-critique (figure 4.28) permet de valider le modèle développé.

L'incapacité à retrouver les bonnes valeurs de déplacements plans dans les modèles numériques situe la difficulté dans les conditions limites entre éléments du bâti. On suppose alors qu'il existe un jeu non nul de l'ordre de 0.3 – 0.6mm dans la structure.

La figure 4.31b obtenue numériquement, montre que la température du bâti n'excède pas 65°C. Les déplacements plans ne peuvent donc pas être induites par la propre dilatation thermique du support. Le déplacement en résultant est d'un ordre inférieur à celui mesuré par stéréo-corrélation. Le jeu pourrait ainsi provenir des plats rainurés qui ont plastifié dès le premier essai, la température critique mesurée alors (58°C dans la figure 4.15a) étant la plus proche des températures critiques obtenues expérimentalement du cas idéal. La réutilisation des plats fléchis dans lesquels sont glissés les isolants droits constitue une explication à l'origine du jeu.



### 3.3 Perspectives d'amélioration

Bien que le voilement des spécimens élancés SPE66, SPE83 et SPE83D ait pu être confirmé expérimentalement et retrouvé à l'aide de la solution analytique, force est de constater que le bridage des essais et la consigne thermique n'ont pas été suffisants pour répondre aux exigences formulées dans la partie 2.

Dans l'éventualité où cette campagne expérimentale serait reproduite et adaptée, nous proposons quelques suggestions d'améliorations faisant suite à notre retour d'expérience.

Premièrement, le système de résistances chauffantes souples nous semble désormais inadapté au rôle que nous lui dédions. La puissance délivrée, limitée par la technologie, ne convient pas pour chauffer des surfaces aussi importantes. La gaine siliconée et le silicone utilisé pour la fixation des résistances sont autant d'isolants thermiques réduisant leur efficacité.

La solution temporaire consistant à superposer deux couches d'éléments chauffants n'est guère recommandable. Si elle nous a permis d'imposer des températures suffisamment élevées pour observer le flambement des spécimens élancés, elle a été insuffisante en présence de tôles plus épaisses et la cinématique thermique désirée n'a pas pu être obtenue. Par ailleurs, les résistances chauffantes fonctionnent à pleine puissance ce qui est susceptible d'entraîner leur dégradation, causée notamment par l'apparition de points chauds.

Nous proposons de recourir à un système de chauffage différent. A cet égard, une solution inductive constituerait une alternative. Un inducteur adapté devrait toutefois être conçu amovible pour permettre l'acquisition par stéréo-corrélation lors du refroidissement.

Nous avons également signalé, dans le paragraphe 3.1.8, la formation de vapeurs toxiques causées par l'échauffement du silicone utilisé pour la fixation des résistances chauffantes. Si en dépit de la remarque précédente, le système de résistances souples est maintenu, il conviendra de veiller à la formulation du produit de scellement utilisé et de prendre les dispositions de sécurité nécessaires.

Selon notre hypothèse, la nature imparfaite du bridage résulterait de la flexion des plats métalliques plastifiés qui accueillent l'isolant. Une solution pour supprimer ce jeu réside en l'élimination des plats métalliques du montage. Des plaques de résines thermodurcissables procurent une raideur et une résistance suffisante comme en témoigne leur intégrité à l'issu des différents essais. A l'origine les plats métalliques avaient été prévus comme sécurité en cas de ruine de l'isolant.

Pour finir, pendant certains essais (notamment SPE83c), les vis M10 utilisées pour assurer le contact entre le spécimen testé et le bâti ont flambé. Il conviendrait de prévoir des vis au diamètre plus importants (M12) pour prévenir le phénomène susceptible de générer des mouvements parasites.

## Conclusion partielle

L'étude dimensionnelle réalisée dans la partie 1 a démontré qu'en cas de changement d'échelle, une maquette s'avérerait incapable de reproduire le comportement thermomécanique réel d'une structure de Génie Civil. Toutefois, les propriétés thermiques de l'acier

assurent l'isothermie de la plaque en acier exposée au chargement thermique. L'analyse dimensionnelle stipule alors que les efforts membranaires sont conservés avec l'homothétie si bien que les températures critiques de la maquette et du système réel sont identiques. Par ailleurs, le déplacement hors-plan entre la structure et sa maquette varie du rapport de la transformation. Il en résulte que pour un même élanement, le phénomène est d'autant plus important et observable que les dimensions sont importantes.

Les contraintes matérielles ont fixé les dimensions maximales des spécimens testés à 635mm. Différents élanements : 33, 45, 50, 66 et 83 sont prévus pour l'étude du domaine de voilement. Deux spécimens présentant un défaut d'affleurement sont également conçus.

Les dimensions ainsi définies sont à l'origine de contraintes qui nécessitent la conception d'un support expérimental original, validé sur la base de simulations numériques. Afin de brider les déplacements de l'ordre de 0.5mm et de reprendre des efforts membranaires de l'ordre de 2MN/m, le bâti est constitué de plats et d'un cadre HEB en acier. Ces éléments métalliques sont d'abord isolés thermiquement du spécimen testé à l'aide de verre trempé. Suite à la ruine du verre au cours des essais, ce dernier est remplacé par la résine thermodurcissable KV<sup>®</sup> 3eco. Le confinement de la structure est finalement assuré par un mortier à retrait compensé.

A l'aide de mesures des déplacements ponctuels par LVDT et par stéréo-corrélation, le voilement des spécimens SPE66, SPE83 et SPE83D a été confirmé. Les spécimens SPE50 et SPE50D n'ont pas flambé comme espéré, mais le système chauffant par résistance souple n'avait pas suffi à assurer la consigne thermique désirée.

Les réponses en déplacement des spécimens voilés se sont révélées être en retard par rapport au cas théorique avec bridage parfait. La reproduction des essais par le biais de simulations numériques n'a pas permis de retrouver le comportement expérimental de façon satisfaisante. Étant donnée l'hypothèse de déplacements continus réalisée dans les simulations et les déplacements plans non nuls mesurés au cours des essais, on soupçonne l'existence d'un jeu parasite entre les divers constituants du bâti. En particulier, les plats accueillant les isolants présentent dès l'issue du premier test une déformation de flexion susceptible d'être à l'origine du problème.

Au contraire des simulations numériques, l'utilisation de la solution analytique développée au chapitre III reproduit plus fidèlement les résultats expérimentaux, à condition d'introduire les déplacements mesurés aux conditions limites. Ce dernier point permet de valider les développements du chapitre III.

Enfin, des suggestions d'améliorations ont été proposées pour la reproduction de cette campagne. Notamment on privilégie un changement du système de chauffage au profit d'une solution inductive et la disparition des plats en acier au profit de plaques de résine.



# Conclusion

A l'issu du chapitre I, nos recherches se sont orientées vers la compréhension et la prévention du phénomène de voilement thermique, très peu abordé dans la littérature. Nous proposons ici une synthèse des résultats principaux de notre recherche ainsi que des perspectives qui découlent des interrogations toujours en suspens.

## Résultats principaux

Dans le chapitre II, nous avons montré qu'à cause des relations de contact cinématiques qu'implique la présence des interfaces acier-béton, le problème de voilement thermique ne peut être résolu par le biais d'analyses de stabilité conventionnelles. Nous avons alors construit un modèle non linéaire dans lequel nous avons souligné l'utilisation d'artefacts numériques (recherche linéaire, introduction d'une perturbation sur le maillage) afin de nous affranchir des difficultés de convergences liées au caractère instable du phénomène traité.

Nous avons alors justifié la nature des lois de comportements utilisées en nous basant sur des résultats issus de la littérature, en particulier des phénoménologies à considérer à haute température. Le traitement des interfaces a fait l'objet d'une attention particulière. On a préféré, pour des raisons de stabilité et coûts numériques, l'utilisation de lois de comportement cohésives aux algorithmes de contact.

Enfin, nous avons opté pour un schéma de couplage synchrone décalé. Ce dernier, tel que nous l'avons défini, provoque un retard du sous-système thermique par rapport au sous-système mécanique, ce qui engendre des erreurs numériques. Afin de maîtriser ces dernières dans nos simulations, nous avons proposé une méthode de prédiction-correction de l'erreur en température. Pour se faire, nous avons exploité les développements en série de Taylor et entière de la température.

Les modèles ainsi construits ont été appliqués à l'échelle de la maille élémentaire des SCs, pour qualifier le phénomène de voilement local. Nous avons donc mené une étude de criblage grâce à la méthode des plans d'expériences. Cette étude paramétrique a révélé la prépondérance de la température, des conditions limites et de l'élancement de l'élément SC dans son comportement au voilement. Au contraire, des paramètres tels que les propriétés du béton, des connecteurs et la nature des échanges thermiques à l'interface acier-béton n'ont pas paru être significatifs à ce niveau d'étude du voilement.

Une analyse de stabilité complémentaire a mis en valeur l'influence d'un défaut initial, à

l'origine d'une déformée de flexion, résultant de l'amplification de cette imperfection avec la température.

Par ailleurs, l'analyse du couplage plasticité-flambement a mis en valeur trois régimes de fonctionnement. Le régime pré-critique (i) correspond à la branche stable du phénomène. Au delà de la température critique, on assiste à l'amplification brutale de la réponse en déplacement hors-plan avec la température, caractéristique du régime post-critique instable (ii). Lorsque le seuil de plastification est atteint avant la température critique, on assiste à une amplification linéaire du déplacement correspondant à un régime de flexion intermédiaire (iii). Ce dernier est notamment causé par la formation de rotules plastiques aux bords de la maille élémentaire. On distinguera au final les régimes de fonctionnement stable, voilement plastique et voilement élastique. Enfin, une évaluation à partir des résultats numériques du poids de la plasticité estime cette dernière à environ 20% de la réponse calculée dans le cadre des hypothèses du chapitre II.

Par conséquent, le modèle analytique que nous avons développé en résolvant le problème de Föppl - von Kármán transposé au cadre de la thermoélasticité intègre la raideur des conditions limites, un défaut initial  $\bar{w}$  et propose trois régimes de fonctionnement :

- En régime pré-critique, la solution est de la forme  $w = \zeta_2 \xi$ , proportionnelle à l'amplitude de l'imperfection  $\bar{w}$ . Elle caractérise l'amplification de cette dernière en flexion.
- En régime post-critique, la solution est de la forme  $w = \sqrt{\zeta_2 \Delta T + \zeta_3}$ , éventuellement pondérée d'un coefficient 1/1.2 en présence de plasticité. On définit alors la température critique comme  $\Delta T_{crit} = -\zeta_3/\zeta_2$ , déterminant le domaine de définition de la fonction  $w$ .
- Un régime intermédiaire basé sur le calcul du seuil en plasticité  $\Delta T_{pl} = \min(\Delta T_{pl}^l, \Delta T_{pl}^g)$ . La solution raccordée est réalisée par une fonction linéaire.

L'étude de la solution analytique a permis de construire le domaine de fonctionnement décrit par la figure 3.21 des éléments SCs dans l'hypothèse d'un bridage parfait des déplacements plans. Nous avons également démontré le caractère conservatif (au sens de la sécurité) des hypothèses simplificatrices suivantes : voilement dans le premier mode, plaque en acier isotherme, bridage parfait aux bords. Ces simplifications ont abouti à la proposition d'une méthode aux expressions simplifiées permettant à l'ingénieur de vérifier le risque de voilement thermique.

L'illustration de cette méthode par un exemple à l'échelle du voile, appuyé d'une étude numérique, a montré que la maille élémentaire à considérer dans la conception s'appuie en réalité sur la diagonale des connecteurs. La dimension à prendre en compte dans la méthode proposée au paragraphe 3.3.1 du chapitre III est alors  $s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$ . Des études supplémentaires devront être réalisées afin de déterminer le coefficient  $\varpi_M$  correspondant aux nouvelles conditions limites.

L'analyse dimensionnelle réalisée en appui à l'élaboration de la campagne expérimentale décrite au chapitre IV a révélé que la température critique était invariable par changement d'échelle. Au contraire, le déplacement hors plan varie du même rapport que celui de l'homothétie réalisée.

Nous avons ensuite proposé un procédé expérimental original dont l'objectif était d'assurer un bridage parfait des déplacements afin de provoquer le voilement par confinement passif de la structure dilatée. Bien que l'objectif ne soit atteint que partiellement comme l'attestent les mesures de champs de déplacements plans par stéréo-corrélation, le voilement des spécimens d'élancement 66 et 83 a pu être observé. Un changement de variable  $w \rightarrow w^2$  a permis de confirmer la forme des réponses en régime post-critique comme des fonctions en  $\sqrt{\zeta_2 \Delta T + \zeta_3}$  ce qui est conforme à la théorie développée au chapitre III. Par ailleurs, le calcul des déplacements résiduels a permis de retrouver des majorants du poids de la plasticité de 20 à 30% de la réponse, ce qui correspond aux prévisions numériques.

Enfin, la prise en compte des déplacements plans mesurés par stéréo-corrélation au cours des essais dans le modèle analytique a permis à ce dernier d'approcher convenablement les résultats expérimentaux. Ce dernier point a validé les développements réalisés.

## Perspectives

L'analyse des champs de déplacements au cours des essais montre qu'un bridage parfait aux bords de la structure réelle est très difficile à réaliser. Par conséquent un tel bridage a peu de risques de se produire pour une structure réelle. La méthode proposée au chapitre III, §3.3.1 repose alors sur une hypothèse simplificatrice trop sécuritaire aboutissant à un surdimensionnement de la structure.

Il conviendra de s'intéresser plus spécifiquement à la valorisation des connecteurs et des connexions. L'utilisation, à cette fin, de l'outil numérique devrait permettre l'obtention de courbes forces-déplacements génériques. Injecter ces données dans le modèle analytique en augmenterait la précision pour une conception optimisée.

La prise en compte des effets mémoires, états initialement dégradés suite à un chargement préalable au voilement thermique, constitue un axe de développement supplémentaire et d'amélioration de la prédiction analytique.

A l'échelle structurelle, la prise en compte d'efforts mécaniques en plus du chargement thermique devrait faire l'objet de traitements plus développés que nous ne l'avons fait au cours de notre étude. Les suggestions que nous avons pu mentionner au cours du paragraphe III, 3.1.2 pourront constituer une base d'étude. Par ailleurs, l'extension du modèle à la structure pourra être développée suivant les trois axes présentés au chapitre III, §3.3.2 : choix d'un volume élémentaire réduit (**VER**) plus représentatif s'appuyant sur la diagonale (i), projection des efforts issues du bridage de la dilatation thermique sur cette même diagonale pour retrouver un état de compression biaxiale (ii) et recalage du coefficient  $\omega_M$  (iii).

Ensuite, le traitement du couplage plasticité-flambement tel que nous l'avons proposé constitue une des limites à la représentativité de notre modèle. Ce point pourrait sans doute être amélioré en optant pour une formulation en vitesse de déformation.

Concernant la problématique plus large du comportement des éléments modulaires en présence de températures élevées, le caractère novateur de la technologie offre une grande liberté de recherches. En particulier, l'influence de ces températures sur la capacité porteuse de la structure demeure méconnue. Afin d'apporter des éléments de réponse, EDF a conçu

une campagne expérimentale en partenariat avec l'université de Karlsruhe, intégrée au projet SCIENCE. A cette occasion, il sera nécessaire de se pencher plus finement que nous ne l'avons fait sur la problématique des transferts thermiques aux interfaces.

Un algorithme de contact thermique pourra être développé sur la base des études issues de la littérature que nous avons présentées au chapitre II. Par ailleurs, en régime stationnaire aux hautes températures, le béton peut atteindre des températures supérieures à 100°C. La problématique du couplage thermo-hydro-mécanique en milieu confiné constitue alors un nouveau verrou scientifique à lever, non évoqué dans notre travail de recherche.

## Annexe A

# Résultats de l'analyse de stabilité

## Introduction

Cette première annexe donne les résultats obtenus en réalisant une étude de flambement à l'aide d'une analyse de sensibilité décrite au chapitre II section 1.1.2. Dans la suite, le déplacement considéré est le déplacement hors plan ( $w$ ), porté par la normale à la plaque. Nous nous intéresserons tout particulièrement au déplacement de la plaque en acier exposée au chargement. Le déplacement est qualifié de positif ( $w > 0$ ) lorsqu'il est porté par la normale sortante à l'élément SC. Un déplacement négatif ( $w < 0$ ) correspond à une pénétration non physique de la plaque en acier dans le béton de remplissage.

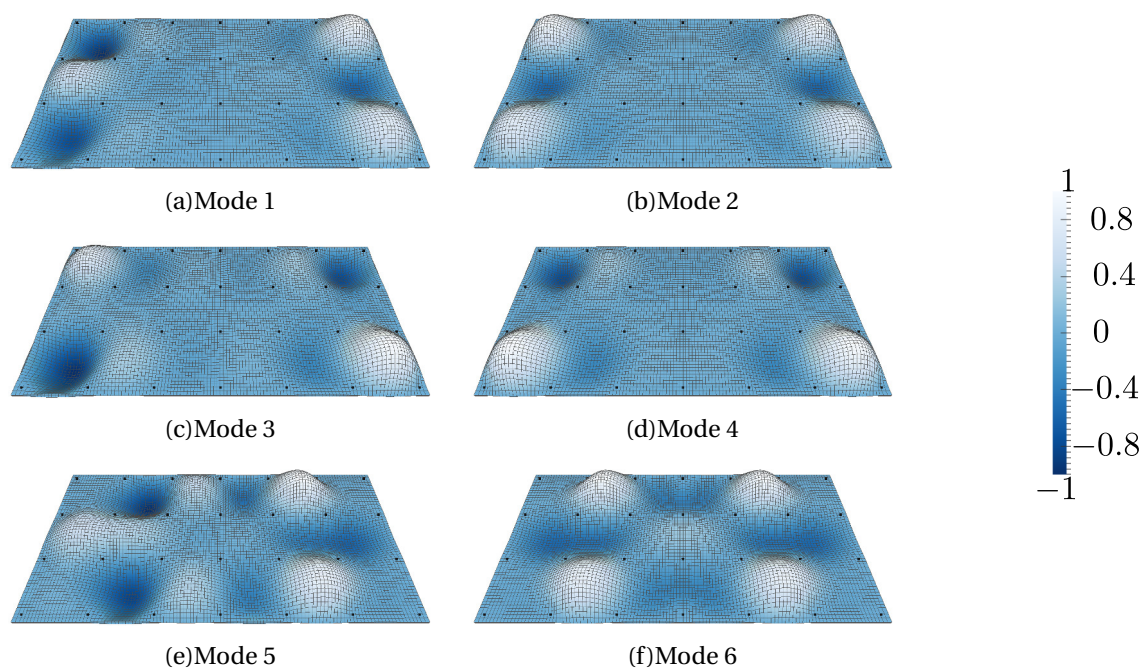
## 1 Échelle de la structure

L'étude est menée au niveau global dans un premier temps : une portion de voile en élément composite est modélisée. L'espacement retenu des connecteurs est constant dans les deux directions :  $s_x = s_y = 200\text{mm}$ .

Pour la figure A.1 les zones foncées correspondent à un déplacement négatif, les zones claires à un déplacement positif tandis que les points matérialisent la position des connecteurs. L'exemple illustre les oscillations de la plaque comprimée dues à la violation des conditions de contact unilatéral induites par la présence du béton.

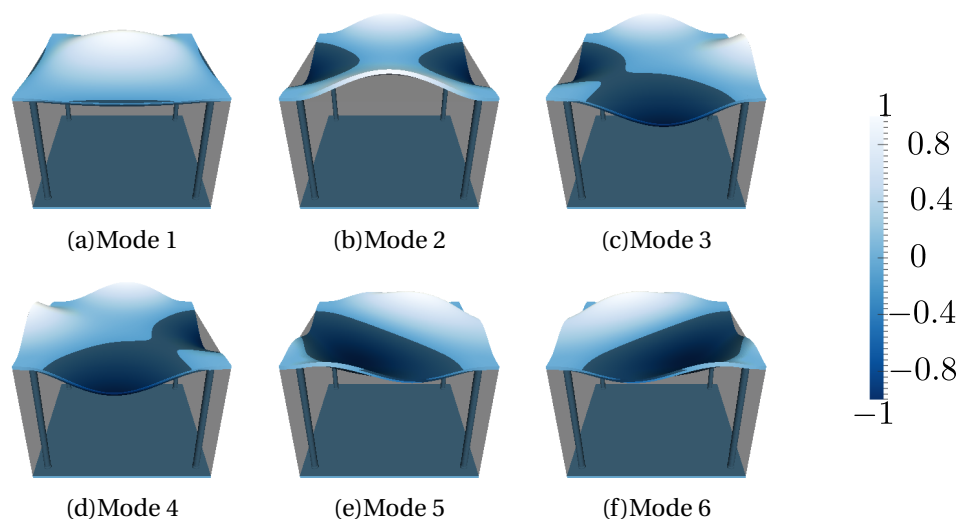
Toutefois, pour un espacement constant des connecteurs dans les deux directions, les différents modes de flambement tendent à correspondre au premier mode local, orienté positivement ou négativement, d'une maille élémentaire de SC (figure A.2a). À partir de cette considération, la figure A.1 montre que les mailles élémentaires constituées d'un élément entre quatre connecteurs flambent au voisinage des bords où sont exercés les efforts. Avec l'accroissement de la contrainte, le flambement se propage des bords vers le centre. On peut s'attendre à un comportement similaire en thermique, où le flambement se produira à proximité des zones de raideurs les plus importantes (connexions avec d'autres éléments, encastresments...)





**FIGURE A.1:** Modes de flambement normalisés pour un voile SC sollicité en bi-compression issus de l'analyse de stabilité ( $\times 0.1$ )

## 2 Échelle de la maille élémentaire



**FIGURE A.2:** Modes de flambement normalisés pour une maille élémentaire SC sollicitée en bi-compression issus de l'analyse de stabilité ( $\times 0.05$ )

L'étude est menée au niveau local pour un élément entre quatre connecteurs (ici de type traversant) et dont les dimensions sont identiques à celle du modèle global précédent :  $s_x = s_y = 200\text{mm}$ .

Les zones foncées de la figure A.2 correspondent à un déplacement négatif, les zones claires à un déplacement positif. Les oscillations non physiques sont également présentes au niveau local mais pour des modes de flambement d'ordre supérieur à 1. Des correspondances entre les modes 3 et 4 ainsi qu'entre les modes 5 et 6 sont observables et dues à la symétrie du système.

## Conclusion

Les résultats combinés des analyses de stabilité aux niveaux global et local apportent plusieurs réponses : elles confirment d'abord que la méthode n'est pas adaptée au système étudié suite à la violation des conditions de contact, se traduisant par des oscillations non physiques (i). Il est nécessaire d'opter pour des analyses numériques réalisées à l'aide d'approches continues présentées au chapitre II section 1.2. Cependant les figure A.1 et figure A.2 suggèrent que les modes de flambement d'un voile SC se décomposent en un assemblage géométrique du premier mode local obtenu à l'échelle de la maille élémentaire (ii). Ces modes élémentaires se concentrant à proximité des régions les plus fortement contraintes avant de se propager (iii).

Suite à ces constats, les études se concentreront dans un premier temps sur la caractérisation du premier mode élémentaire. L'objectif sera de déduire d'études numériques des critères analytiques visant à prévenir l'apparition des modes de flambement locaux.

Enfin, le premier mode local obtenu (figure A.2a) servira de référence lors de l'introduction d'imperfections dans les simulations numériques et lors de la constitution d'hypothèses pour le développement des solutions analytiques.



## Annexe B

# Étude comparative des lois béton implémentées dans Code\_Aster

## Introduction

Cette annexe présente les études, en amont des simulations, qui ont été réalisées afin de justifier de l'emploi du modèle de Mazars pour modéliser le comportement du béton. Nous effectuerons une revue succincte des différentes lois de comportements implémentées dans Code\_Aster. Nous comparerons ensuite ces lois entre elles afin de saisir les phénoménologies qu'elles permettent de reproduire. Pour finir, nous présenterons les résultats de l'identification menée sur la loi de Mazars à hautes températures.

## 1 Comportements endommageables de *Code\_Aster*

Cette partie propose une revue des différents comportements implémentés dans *Code\_Aster*<sup>1</sup> permettant de modéliser le béton avec des éléments hexaédriques.

### 1.1 Lois *endo\_scalaire* et *endo\_carré*

Ces deux lois sont construites à partir du même potentiel. Elles permettent de modéliser le comportement élastique fragile en version non locale afin d'assurer un comportement régulier, au moins dans le cas unidimensionnel. La version locale existe sous la dénomination *endo\_fragile*. Les paramètres des lois ont été choisis de façon à éviter les problèmes de *snap-back* dans la réponse force-déplacement et à assurer un allongement finie des barres 1D lors de la rupture. La loi est formulée à partir d'un potentiel d'énergie libre et d'un potentiel de dissipation permettant de définir l'évolution des variables internes en s'appuyant sur une règle d'écoulement. Une seule variable interne est utilisée pour décrire l'endommagement de la structure. Le problème se rapporte alors à un problème variationnel sous

---

1. version stable 11, année 2015

contrainte d'endommagement croissant. Soit la densité d'énergie libre :

$$\rho \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, D) = \mathcal{A}(D) \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \omega(D) + c l^2 (\nabla D)^2 \quad (\text{B.1})$$

Où  $\mathcal{A}(D)$  est la fonction de rigidité telle que  $\mathcal{A}(D = 0) = 1$  et  $\mathcal{A}(D = 1) = 0$ . Dans le cas de la loi *endo\_scalaire*  $\mathcal{A}(D) = \left(\frac{1-D}{1+\gamma D}\right)^2$ , pour *endo\_carre* :  $\mathcal{A}(D) = (1 - D)^2$ .  $w(D)$  est l'énergie de dissipation prise égale à  $(k D)$  et  $c$ , le paramètre de non localité.  $\gamma$  et  $k$  sont des paramètres matériaux à identifier.

les lois d'état donnent l'expression du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \mathcal{A}(D) \underline{\underline{\varepsilon}}$  et de la force motrice de l'endommagement  $Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{,D}(D) \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - w_{,D}(D) + c \Delta D$ . Dans le cas de la loi *endo\_carré*, en compression, seule la partie associée au déviateur est corrigée. Il vient avec  $\lambda_L$  et  $\mu_L$  coefficients de Lamé et  $\mathcal{H}$  la fonction de Heaviside :

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1 - D)^2 \left( \left( \lambda_L + \frac{2\mu_L}{3} \right) \cdot \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \mathcal{H}(\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu_L \underline{\underline{\varepsilon}}' \right) + \left( \lambda_L + \frac{2\mu_L}{3} \right) \cdot \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \mathcal{H}(-\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} \quad (\text{B.2})$$

## 1.2 Loi de comportement *endo\_isot\_beton*

La loi de comportement *endo\_isot\_beton* cherche à modéliser le plus simplement possible un comportement de béton élastique fragile. Cette loi se rapproche de la loi *endo\_fragile* en l'étendant aux applications de Génie Civil. Le matériau est considéré isotrope tenant compte d'une variable d'endommagement. Les comportements en traction et en compression sont distingués : une reprise de raideur se produit lors d'un retour en compression suite à une sollicitation de traction. Il convient de remarquer que cette loi vise à décrire la rupture du béton en traction. Elle n'est pas adaptée à la description du comportement non linéaire du béton comprimé, comme le précise l'auteur du document. Il faut donc veiller à ce que le béton reste dans un état modéré de compression. Telle que nous l'exprimons dans la suite, la loi est formulée dans sa version locale. Une délocalisation peut être réalisée en introduisant une régularisation en gradient de déformations.

Le potentiel choisi, dont la formule découle, correspond à l'énergie libre exprimée dans un repère propre de déformations.

$$\rho \psi = \frac{\lambda_L}{2} \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} + \mu_L \sum_I \varepsilon_I^2 \quad (\text{B.3})$$

Le signe de  $\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}$  définit la nature de la déformation volumique (traction, compression) de même le signe de  $\varepsilon_I$  donne la nature de la déformation dans chaque direction principale. Une seule variable interne  $D$  est utilisée pour décrire l'endommagement de la structure en traction. Dans le cas de la compression, aucune correction n'est apportée. Enfin, une fonction indicatrice du domaine admissible de  $D$  est introduite pour majorer la variable d'endommagement  $D \leq 1$  :

$$\mathcal{I}_{[-\infty;1]}(D) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Et il vient :

$$\rho\psi^e(\epsilon, D) = \frac{\lambda_L}{2} \text{tr}^2 \underline{\underline{\epsilon}} \left( \mathcal{H}(-\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}}) + \frac{1-D}{1-\gamma D} \mathcal{H}(\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}}) \right) + \mu_L \sum_I \epsilon_I^2 \left( \mathcal{H}(-\epsilon_I) + \frac{1-D}{1-\gamma D} \mathcal{H}(\epsilon_I) \right) + \mathcal{I}_{[-\infty; 1]}(D) \quad (\text{B.5})$$

On en déduit  $\sigma_{ii} = \lambda_L \text{tr} \underline{\underline{\epsilon}} \left( \mathcal{H}(-\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}}) + \frac{1-D}{1-\gamma D} \mathcal{H}(\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}}) \right) + 2\mu_L \epsilon_{ii} \left( \mathcal{H}(-\epsilon_{ii}) + \frac{1-D}{1-\gamma D} \mathcal{H}(\epsilon_{ii}) \right)$  et  $Y = -\rho \frac{\partial \psi^e}{\partial D} = \frac{1+\gamma}{(1+\gamma \cdot D)^2} \left[ \frac{\lambda}{2} \text{tr}^2 \underline{\underline{\epsilon}} \mathcal{H}(\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}}) + \mu \sum_I \epsilon_I^2 \mathcal{H}(\epsilon_I) \right]$ . La fonction critère est donnée par  $f(Y) = Y(\underline{\underline{\epsilon}}, D) - Y_0$  où  $Y_0$  définit le seuil d'endommagement donné par  $Y_0 = k_0 - k_1 \text{tr} \underline{\underline{\epsilon}} \mathcal{H}(-\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}})$ . Où  $k_0$  et  $k_1$  sont des coefficients respectivement fonctions de la résistance en traction et en compression. Il vient enfin :

$$f(Y) \leq 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{D} = 0 & \text{pour } f < 0 \\ \dot{D} \geq 0 & \text{pour } f = 0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Le calcul de l'endommagement au pas  $n$  se fait comme suit : on calcule un endommagement de référence tel que  $Y(\epsilon, D^{\text{test}}) - \kappa = 0$  (i). Par la suite, si  $D^{\text{test}} \leq D_{n-1}$  alors  $D_n = D_{n-1}$  (ii). Si  $D^{\text{test}} \geq D_{n-1}$  alors  $D_n = D^{\text{test}}$  (iii). Enfin si  $D^{\text{test}} \geq 1$  alors  $D_n = 1$  (iv).

### 1.3 Loi de comportement *Mazars*

Ce comportement fait l'objet d'une description dans le corps de la thèse (chapitre II section 2.2.1) qui n'est pas reprise ici. Toutefois, on notera que le modèle implémenté dans *Code\_Aster* n'est pas le modèle d'origine mais une évolution présentant deux modifications majeures : l'amélioration du comportement en bi-compression (i) et la simplification et l'amélioration du comportement en cisaillement (ii). Ces objectifs sont atteints en corrigeant la déformation équivalente lorsqu'au moins une contrainte principale est négative, à l'aide d'une variable  $\gamma$  telle que :

$$(\epsilon_{\text{Maz}}^{\text{eq}})^{\text{corr}} = \gamma \sqrt{\sum_I \langle \epsilon_I \rangle_+^2} \quad \text{avec} \quad \gamma = \begin{cases} -\frac{\sqrt{\sum_I \langle \epsilon_I \rangle_-^2}}{\sqrt{\sum_I \langle \epsilon_I \rangle_-}} & \text{si } \exists I \in \{1, 2, 3\} \text{ tel que } \sigma_I < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

### 1.4 Loi *endo\_orth\_beton*

Généralement, le béton est modélisé comme un matériau isotrope en justifiant que les micro-fissures n'ont pas de directions privilégiées. Tant que le béton est sollicité dans son domaine élastique, il conserve ce caractère isotrope, cependant dès lors que s'amorce la fissuration mésoscopique, les microfissures vont se développer dans des directions particulières, orthogonales aux directions de plus grande traction ou compression. Le modèle de comportement anisotrope implémenté dans *Code\_Aster* souhaite introduire une orthotropie à l'aide d'un tenseur symétrique d'ordre deux représentant les effets de l'endommagement.

Le caractère irréversible de l'endommagement est assuré en imposant une condition sur les valeurs propres qui doivent être croissantes et bornées.

Soit la loi de l'élasticité écrite dans une base de vecteurs propres, il vient :

$$\rho \psi^e = \frac{\lambda_L}{2} \text{tr}^2 \underline{\underline{\varepsilon}} + \mu_L \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{B.8})$$

L'effet unilatéral (voir chapitre II) est introduit en décomposant les déformations en leurs parties positives et négatives. L'énergie libre (B.8) peut alors s'écrire :

$$\rho \psi^e = \frac{\lambda_L}{2} \left[ \langle \text{tr}^2 \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle + \langle -\text{tr}^2 \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle \right] + \mu_L \left[ \langle \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_+ + \langle \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_- \right] \quad (\text{B.9})$$

Deux variables d'endommagement sont introduites :  $\underline{\underline{D}}^{\text{tr}}$  : tenseur d'ordre deux relatif à l'endommagement créé en traction (i).  $D^{\text{cp}}$  : scalaire relatif à l'endommagement créé en compression (ii). Le choix d'une variable scalaire pour l'endommagement de compression s'explique par le fait que lorsqu'un échantillon est comprimé, des fissures apparaissent également dans les plans orthogonaux aux directions principales non sollicitées. Lors d'une sollicitation dans une direction, la raideur diminue dans les trois directions principales. Sans toutefois consister en un comportement isotrope, cette tendance révèle une anisotropie moins forte qu'en traction. Modéliser un endommagement isotrope en compression permet de simplifier le modèle. La variable représentant l'intégrité du matériau en traction est notée  $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{D}}^{\text{tr}}$ . Enfin, il faut prendre soin de majorer les variables d'endommagements par 1. Pour cela, deux fonction indicatrices du domaine admissible sont introduites dans l'expression de l'énergie libre. L'équation (B.9) devient :

$$\begin{aligned} \rho \psi^e(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{B}}, D^{\text{cp}}) = & \frac{\lambda_L}{2} \cdot \left[ \langle \text{tr}^2(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}) \rangle + (1 - D^{\text{cp}})^2 \cdot \langle -\text{tr}^2 \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle \right] \\ & + \mu_L \left[ \frac{1}{4} \langle (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{B}}) : (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{B}}) \rangle_+ + (1 - D^{\text{cp}})^2 \cdot \langle \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_- \right] \\ & + \mathcal{I}_{[0;\infty]}(\min_I B_I) + \mathcal{I}_{[-\infty;1]}(D^{\text{cp}}) \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

Enfin, une énergie bloquée est introduite pour pouvoir mieux contrôler l'évolution de l'endommagement en fonction du chargement. Ce terme qui ne dépend que de l'endommagement, n'a aucune incidence sur la contrainte calculée mais ajoute un terme à l'équation des forces thermodynamiques associées aux endommagements. Cette énergie notée  $\psi_b(\underline{\underline{B}}, D^{\text{cp}})$  doit être nulle lorsque le matériau est sain.  $\rho \psi_b(\underline{\underline{B}}, D^{\text{cp}}) = \frac{\gamma_b}{2} \underline{\underline{D}}^{\text{tr}} : \underline{\underline{D}}^{\text{tr}} + \gamma_d (D^{\text{cp}})^2$ . On en déduit

les expressions de la contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{B}}, D^{\text{cp}}) = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \lambda_L \left[ \langle \text{tr}(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}) \rangle \underline{\underline{B}} + (1 - D^{\text{cp}})^2 \langle -\text{tr}^2 \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle \cdot \underline{\underline{1}} \right] + \mu_L \left[ \frac{1}{2} \left( \langle \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{B}} \rangle_+ \cdot \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{B}} \cdot \langle \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{B}} \rangle_+ \right) + 2(1 - D^{\text{cp}})^2 \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_- \right]$  et des taux de restitution d'énergie en traction et compression  $\underline{\underline{Y}}^{\text{tr}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{B}}) = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{B}}} = -\lambda_L \langle \text{tr}(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}) \rangle_+ \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{\mu_L}{2} \left[ \langle \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{B}} \rangle_+ \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \langle \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{B}} \rangle_+ \right] + \gamma_B (1 - \underline{\underline{B}})$  et  $Y^{\text{cp}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, D^{\text{cp}}) = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D^{\text{cp}}} = \lambda_L (1 - D^{\text{cp}}) \langle -\text{tr}^2 \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_- + 2 \mu_L (1 - D^{\text{cp}}) \langle \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_- - 2 \gamma_d D^{\text{cp}}$ . Chaque force thermodynamique est constituée de deux parties, dont l'une

dérive du potentiel élastique et dépend de la déformation. Tandis que l'autre dérive de l'énergie bloquée et va jouer le rôle d'un écrouissage.

Un critère unique permet de coupler l'évolution des deux variables d'endommagement.

$$f(\underline{\underline{Y}}^{\text{tr}}, Y^{\text{cp}}) = \sqrt{\alpha \|\underline{\underline{Y}}^{\text{tr}}\|^2 + (1 - \alpha) (Y^{\text{cp}})^2} - \kappa(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (\text{B.11})$$

Seules les parties négative de  $\underline{\underline{Y}}^{\text{tr}}$  et positive de  $Y^{\text{cp}}$  interviennent afin d'imposer la croissance de l'endommagement.  $\kappa(\underline{\underline{\varepsilon}})$  est un seuil dépendant de l'état de déformation tel que  $\kappa(\underline{\underline{\varepsilon}}) = k_0 - k_1 (\langle -\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle) \arctan \left( \frac{\langle -\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle}{k_2} \right)$ . L'évolution des variables d'endommagement est finalement déterminée par les conditions de Kuhn-Tucker.

## 1.5 Loi *beton\_double\_dp*

Le modèle est une loi de comportement non linéaire pour le béton qui s'appuie sur la théorie de la plasticité. Le modèle est basé sur le domaine de réversibilité des contraintes délimité par un double critère de type Drucker-Prager. L'écoulement plastique est régi par une règle de normalité, la formulation des écrouissages est isotrope.

Dans l'espace des contraintes principales, le domaine de réversibilité prend l'allure d'un cône dont l'axe est la trissectrice d'équation  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . La fonction critère est définie par  $f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{A}}) \leq 0$  où  $\underline{\underline{A}}$  représente les forces thermodynamiques associées aux variables internes. Soit  $\phi$  la part élastique en compression. Dans le cas particulier de ce modèle, deux critères sont définis, un pour la traction et un pour la compression. Par ailleurs, deux cas sont distingués selon que le point est régulier :  $f^{\text{cp}}(\underline{\underline{\sigma}}, A^{\text{cp}}) = \frac{\sqrt{2}}{3b} \sigma^{\text{eq}} + \frac{a}{b} \sigma_H - \phi \sigma_{\text{bk}}^{\text{cp}} + A^{\text{cp}}$  et  $f^{\text{tr}}(\underline{\underline{\sigma}}, A^{\text{tr}}) = \frac{\sqrt{2}}{3d} \sigma^{\text{eq}} + \frac{c}{d} \sigma_H - \sigma_{\text{bk}}^{\text{tr}} + A^{\text{tr}}$  ou qu'il s'agit d'un sommet :  $f_H^{\text{cp}}(\underline{\underline{\sigma}}, A^{\text{cp}}) = \frac{a}{b} \sigma_H - \phi \cdot \sigma_{\text{bk}}^{\text{cp}} + A^{\text{cp}}$  et  $f_H^{\text{tr}}(\underline{\underline{\sigma}}, A^{\text{tr}}) = \frac{c}{d} \sigma_H - \sigma_{\text{bk}}^{\text{tr}} + A^{\text{tr}}$

**Choix des coefficients** Les coefficients  $a, b, c, d$  sont obtenus en écrivant l'égalité des critères en traction et compression à leur intersection. Les relations obtenues sont données dans la table B.1. Dans laquelle  $\alpha$  est le rapport entre limite de rupture en traction et compression et  $\beta$  le rapport entre limite de rupture en bi-compression et compression simple.

**TABLE B.1:** Relation entre les coefficients de la loi *beton\_double\_dp*

Numéro de condition	État de contrainte	Critère atteint	Relation obtenue
1	Compression simple	Compression	$a + 3b = \sqrt{2}$
2	Bi compression	Compression	$2a + \frac{3}{\beta} b = \sqrt{2}$
3	Traction	Traction	$-c + 3d = \sqrt{2}$
4	Compression simple	Traction	$c + 3\alpha d = \sqrt{2}$

Deux variables internes d'écrouissages isotropes sont définies dans ce modèle :  $R_{\text{cp}}$  et  $R_{\text{tr}}$  (respectivement en compression et en traction). Leurs forces thermodynamiques associées



s'expriment par :

$$\begin{aligned} A^{\text{cp}} &= \phi \sigma_{\text{bk}}^{\text{cp}} - \sigma_{\text{bk}}^{\text{cp}}(R_{\text{cp}}) \\ A^{\text{tr}} &= \sigma_{\text{bk}}^{\text{tr}} - \sigma_{\text{bk}}^{\text{tr}}(R_{\text{tr}}) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Où  $\sigma_{\text{bk}}^{\text{cp}}(R_{\text{cp}})$  (resp.  $\sigma_{\text{bk}}^{\text{tr}}(R_{\text{tr}})$ ) désigne la valeur de la résistance en compression (resp. traction). L'évolution des variables internes est ensuite obtenue classiquement à partir des conditions de cohérence et de normalité.

## 2 Caractérisation des Lois bétons de Code\_Aster

Dans cette partie, nous essaierons de reproduire numériquement certains essais élémentaires afin de caractériser les différentes lois dont nous avons énoncé les formulations précédemment.

### 2.1 Identification des paramètres à température ambiante

Afin de procéder à l'identification des paramètres matériaux, des essais unidimensionnels de traction et compression sont nécessaires. S'il est possible d'obtenir des résultats d'essais de compression [Schneider, 1988, Chang *et al.*, 2006], pilotés en déplacement et réalisés à différentes températures, il est plus difficile d'acquérir des résultats exploitables en traction directe. [Nechnech, 2000] cite les travaux de [Felicetti et Gambarova, 1999] qui proposent des résultats exploitables en traction mais correspondant à des bétons hautes performances.

TABLE B.2: Nature des paramètres matériaux des modèles bétons de Code\_Aster

	<i>endo_scalaire</i>	<i>endo_carre</i>	<i>endo_isot_beton</i>
<b>P1</b>	$\sigma_{\text{bk}}^{\text{tr}}$ rés. traction (MPa)		
<b>P2</b>	$G_f$ énergie de Griffith (N/m)		$\sigma_{\text{bk}}^{\text{cp}}$ rés. compression (MPa)
<b>P3</b>	$d$ longueur caractéristique (m)		$p$ pente en traction

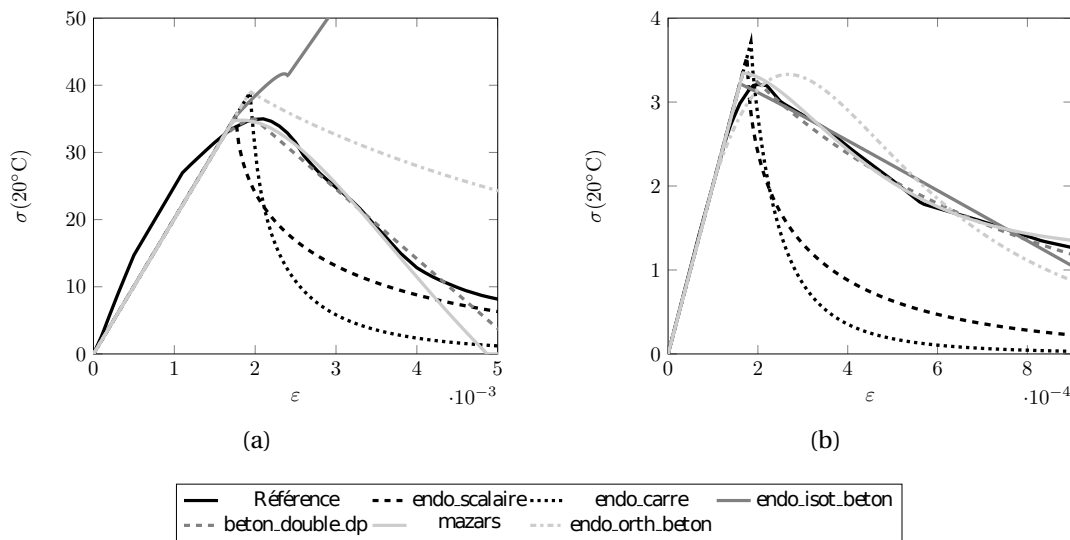
	<i>beton_double_dp</i>	<i>mazars</i>	<i>endo_orth_beton</i>
<b>P1</b>	$\sigma_{\text{bk}}^{\text{tr}}$ (MPa)	$\varepsilon_{\text{d}_0}$ seuil endo.	$k_0$ para. seuil endo. (MPa)
<b>P2</b>	$\sigma_{\text{bk}}^{\text{cp}}$ (MPa)	$A^{\text{tr}}$ para. mat.	$k_1$ para. seuil endo. (MPa)
<b>P3</b>	$G^{\text{tr}}$ énergie trac. (MJ/m <sup>3</sup> )	$B^{\text{tr}}$ para. mat.	$k_2$ para. seuil endo. (MPa)
<b>P4</b>	$G^{\text{cp}}$ énergie comp. (MJ/m <sup>3</sup> )	$A^{\text{cp}}$ para. mat.	$\gamma^{\text{tr}}$ énergie trac. (MJ/m <sup>3</sup> )
<b>P5</b>	$\phi$ part élasticité en comp.	$B^{\text{cp}}$ para. mat.	$\gamma^{\text{cp}}$ énergie comp. (MJ/m <sup>3</sup> )
<b>P6</b>	$C^{\text{cp}}$ rapport de biaxialité	$K$ para. mat.	$\zeta$ para. couplage trac.-comp.

Nous étudierons le comportement sur l'essai de traction uniaxiale puis sur l'essai de compression en distinguant les régimes linéaire et adoucissant. La table B.2 donne les

paramètres de chaque loi ainsi que leur description et leur unité tandis que la table B.3 donne les valeurs de chaque paramètre après identification.

**TABLE B.3:** Valeurs des paramètres matériaux retenus après identification

	$E$	$\nu$	P1	P2	P3	P4	P5	P6
<i>endo_scalaire</i> (trac.)	20167	0.17	3.21	110.35	0.08			
<i>endo_scalaire</i> (comp.)	20167	0.17	32.18	1103.55	0.008			
<i>endo_carre</i> (trac.)	20115	0.17	3.68					
<i>endo_carre</i> (comp.)	20115	0.17	35.04					
<i>endo_isot_beton</i>	20167	0.17	3.21	31.71	-2754.58			
<i>beton_double_dp</i>	20066	0.17	3.39	34.99	0.0027	0.098	92.85	1.14
<i>mazars</i>	20070	0.17	0.00016	0.63	6177.3	3.57	2268.5	0.7
<i>endo_orth_beton</i>	20167	0.17	0.0002	10.16	0.00001	0.0043	0.0001	0.92



**FIGURE B.1:** Lois de comportements implémentés en compression (a) et traction (b)

À partir de la figure B.1, on remarque que la loi *endo\_isot\_beton* présente une réponse en compression complètement élastique au delà d'un certain seuil de contraintes subies. Il est donc important de tenir compte de son domaine de validité, défini pour des contraintes de compression relativement faibles lors de son utilisation. Les lois *endo\_scalaire* et *endo\_carre* présentent des réponses assez similaires, notamment un comportement post-pic exponentiel décroissant avec une perte de raideur très brutale qui ne correspond pas au comportement recherché en cas de compression. Par ailleurs, ces deux lois ne distinguent

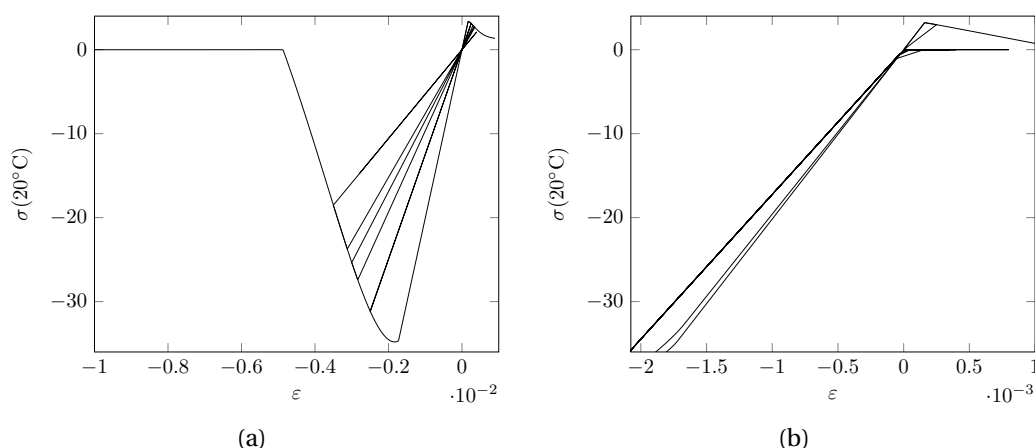
pas les comportements de traction et de compression ce qui les rend inaptes à modéliser des essais alternés. La loi *beton\_double\_dp* présente un adoucissement linéaire. La bonne correspondance avec les résultats expérimentaux en font un modèle intéressant. Cependant, il ne tient pas compte d'une diminution de la raideur avec le développement de la microfissuration. La loi *endo\_orth\_beton* présente une bonne correspondance avec les essais. Cependant les paramètres sont difficiles à identifier et on aura noté de plus grandes difficultés à converger, donc des calculs plus coûteux. Au final, une correspondance très satisfaisante a été obtenue avec la loi *mazars*, à moindre coût tant sur l'identification des paramètres que la vitesse de convergence.

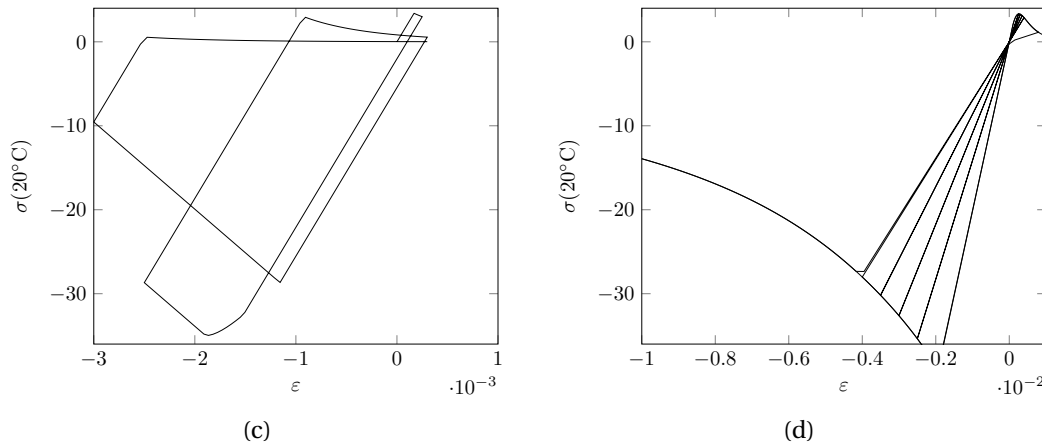
## 2.2 Réponses numériques à des sollicitations complexes

Afin de caractériser le comportement propre à chacun des modèles *endo\_isot\_beton*, *endo\_orth\_beton*, *beton\_double\_dp* et *mazars*, nous proposons de varier les sollicitations. Ainsi, nous nous intéresserons successivement à un chargement alterné, au confinement et à la réponse en présence d'une élévation de la température.

### 2.2.1 Sollicitations alternées

Procéder à des essais cycliques permet de vérifier la nature du comportement modélisé (endommagement avec perte de raideur, plasticité) et de vérifier si le caractère unilatéral du béton est pris en compte par le modèle. Ce dernier point se manifestera par une reprise de raideur en compression suite à la fermeture des fissures de traction.





**FIGURE B.2:** Comportement cyclique des lois *mazars* (a), *endo\_isot\_beton* (b), *beton\_double\_dp* (c) et *endo\_orth\_beton* (d)

Les figures B.2a, B.2b et B.2d confirment respectivement le caractère endommageable des modèles *mazars*, *endo\_isot\_beton* et *endo\_orth\_beton*. En compression comme en traction, la raideur matériau diminue avec le chargement. L'absence de déformation résiduelle et d'hystérèses prouvent le caractère élastique de ces lois matériaux.

On observe que le comportement du module d'élasticité du matériau est différent en traction et compression pour les lois *endo\_isot\_beton* et *endo\_orth\_beton*. Un regain de raideur apparaît lors du changement de signe de la contrainte exercée. Il s'agit des deux seuls modèles volumiques de béton à prendre en compte l'effet unilatéral. Bien que deux variables d'endommagement soient définies dans le modèle *mazars*, ce dernier ne permet pas la prise en compte du phénomène de refermeture des fissures.

Pour finir, la figure B.2c illustre un comportement élasto-plastique à travers des translations des domaines d'élasticité de compression et de traction. La raideur, constante, témoigne de l'absence de prise en compte de l'endommagement. Il n'existe pas à ce jour dans *Code\_Aster* de lois tenant compte d'un couplage endommagement-plasticité.

### 2.2.2 Confinement

Ce test numérique permet d'évaluer l'apport du confinement en ductilité sur la réponse contrainte - déformation du béton. Il est réalisé en imposant un chargement hydrostatique à l'élément avant de procéder à un essai de compression uniaxiale. Les conditions d'appuis imposées sont les suivantes :

- blocage des déplacements suivant  $x$  pour chaque nœud de la face située dans le plan  $(O, y, z)$
- blocage des déplacements suivant  $y$  pour chaque nœud de la face située dans le plan  $(O, x, z)$
- blocage des déplacements suivant  $z$  pour chaque nœud de la face située dans le plan  $(O', x, y)$

Un déplacement négatif est défini suivant  $y$ , tandis que des contraintes de compressions constantes de 26 MPa assurent le confinement du béton.

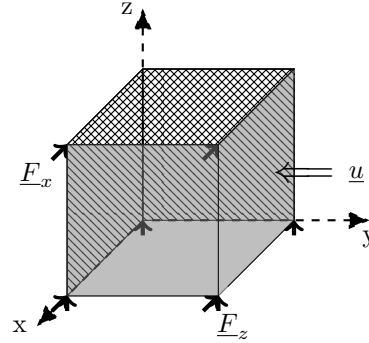


FIGURE B.3: Validation numérique élémentaire du confinement - situation

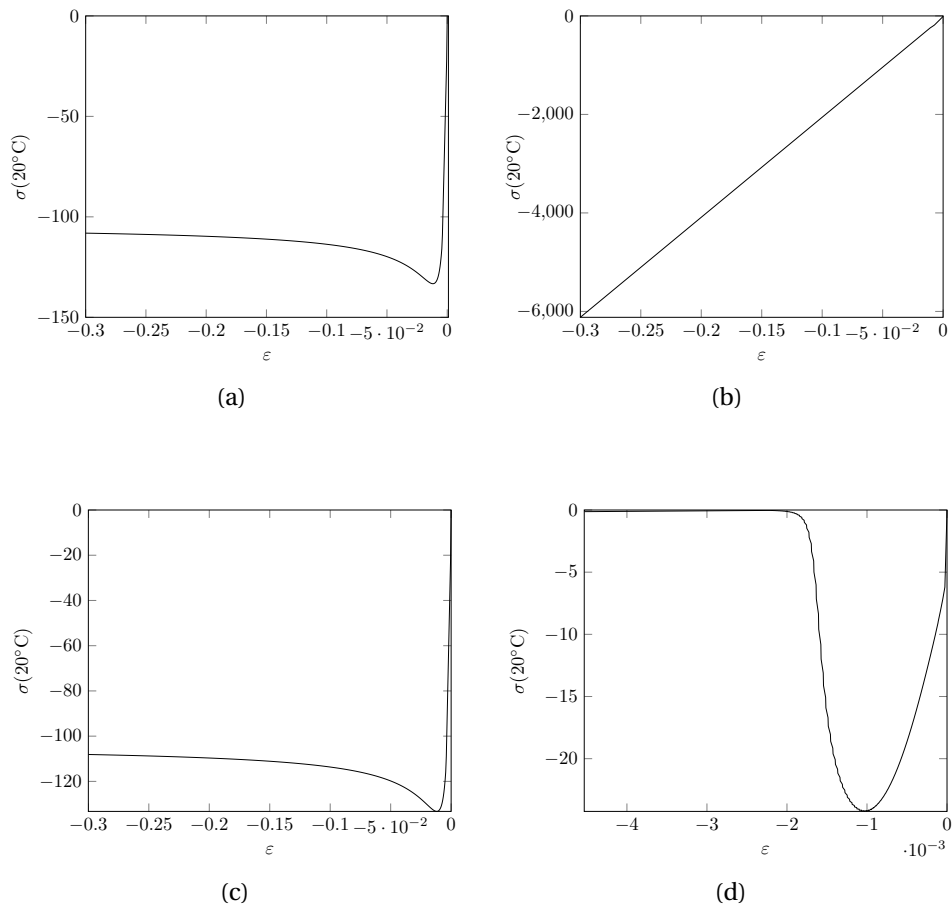
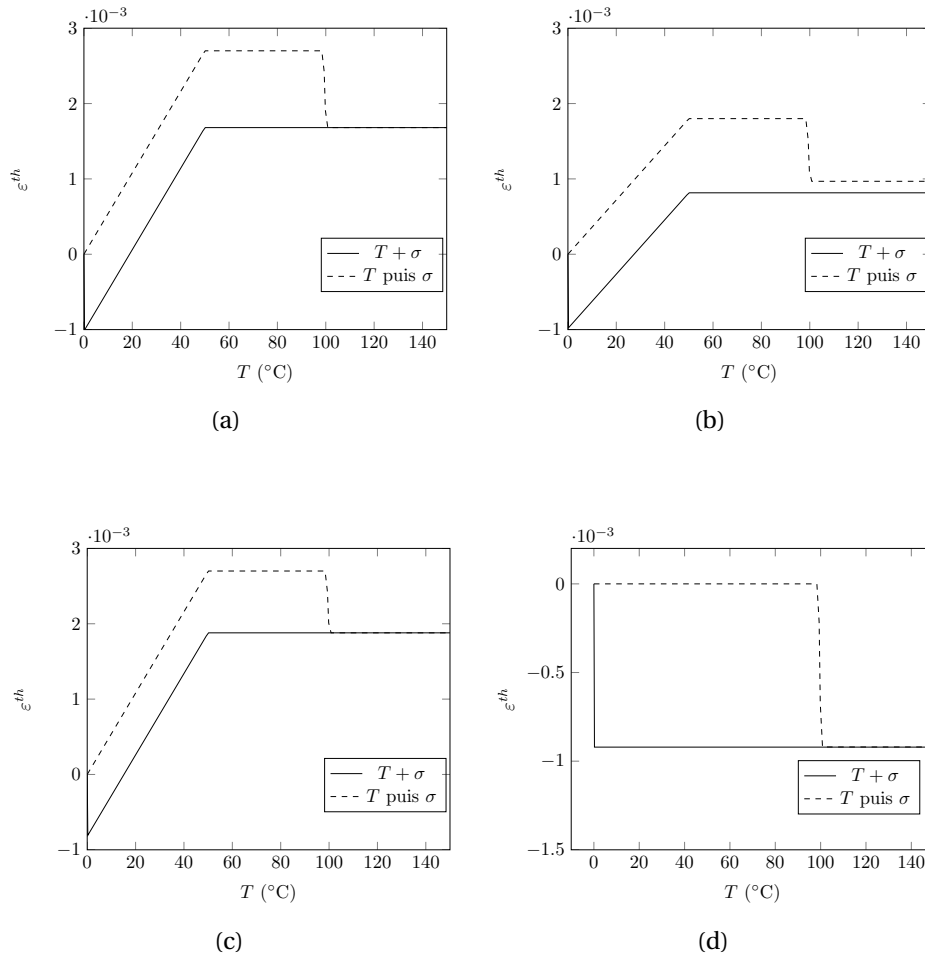


FIGURE B.4: réponse au confinement des lois *mazars* (a), *endo\_isot\_beton* (b), *beton\_double\_dp* (c) et *endo\_orth\_beton* (d)

Le gain de ductilité attendu est retrouvé pour les comportements de *mazars* et *beton\_double\_dp*. Les deux autres modèles ne permettent pas de retrouver ce comportement. La loi *endo\_isot\_beton* souffre de son comportement élastique en compression. La loi *endo\_orth\_beton* quant à elle ne voit pas son comportement fondamentalement modifié, et présente des difficultés de convergence lorsque les contraintes sont supérieures à sa charge admissible.

### 2.2.3 Sollicitations thermiques

Dans sa thèse [Nechnech, 2000] rappelle que la déformation thermique dépend du trajet des sollicitations. Ainsi, lorsque les chargements mécanique et thermique sont appliqués de façon décalée, la déformation thermique axiale a tendance à augmenter fortement suivie d'une baisse modérée lorsqu'est appliqué l'effort mécanique. Au contraire, en présence de chargements simultanés, la dilatation thermique axiale du spécimen est fortement réduite.



**FIGURE B.5:** Dépendance au trajet de sollicitation de la déformation thermique axiale des lois *mazars* (a), *endo\_isot\_beton* (b), *beton\_double\_dp* (c) et *endo\_orth\_beton* (d)

Les résultats de la figure B.5 attestent qu'aucune loi ne donne le résultat escompté dans le cas où le chauffage et le chargement mécanique sont appliqués simultanément. Plus surprenant, il est impératif de noter que la loi *endo\_orth\_beton* ne permet pas de modéliser le comportement thermique du béton : la déformation thermique n'est pas prise en compte lors du calcul de la déformation totale. Enfin une très légère dépendance est observable sur la figure B.5b à cause de l'effet unilatéral du béton qui est pris en compte dans la loi *endo\_isot\_beton*.

## 2.2.4 Synthèse

Des résultats présentés précédemment, nous pouvons extraire le tableau de synthèse B.4.

**TABLE B.4:** Comparaison des lois béton de *Code\_Aster*

	<i>endo scalaire</i>	<i>endo carré</i>	<i>endo isot beton</i>	<i>mazars</i>	<i>beton double dp</i>	<i>endo orth beton</i>
Assymétrie traction-compression	×	×	✓	✓	✓	✓
Facilité convergence	—	—	++	+	—	--
Loi anisotrope	×	×	×	×	×	✓
Endommagement			✓	✓	×	✓
Plasticité			×	×	✓	×
Effet unilatéral			✓	×	×	✓
Confinement			×	✓	✓	×
Variations paramètres avec température			×	✓	✓	×
$\varepsilon^{\text{th}}$			✓	✓	✓	×
Sensibilité $\varepsilon^{\text{th}}$ au chemin de sollicitation			×	×	×	×

On observe que les lois *mazars* et *béton\_double\_dp* se distinguent des autres dans ce tableau de synthèse. On se propose de les considérer pour les études à venir, notamment pour leur capacité à modéliser correctement l'effet du confinement, qui, dans le cadre des structures modulaires est important, et pour les possibilités qu'elles présentent vis à vis de la thermique. Néanmoins, aucune de ces deux lois ne permet de modéliser le caractère unilatéral du béton. De plus, dans l'une, le phénomène d'endommagement n'est pas modélisé tandis que, dans l'autre, les déformations permanentes ne sont pas prises en compte. Pour ses facilités de convergences, on préférera *mazars*.

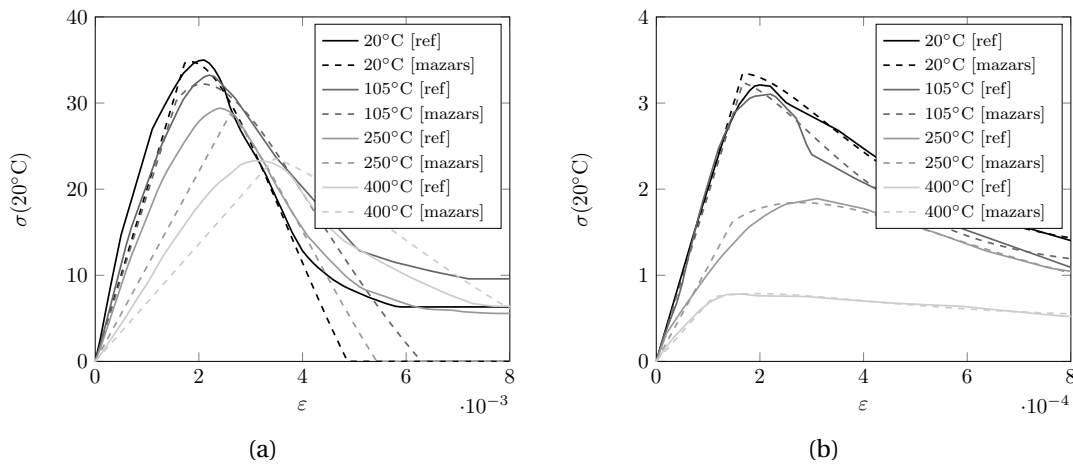
### 3 Identification des paramètres de la loi de Mazars à températures élevées

Les valeurs des paramètres sont obtenues par recalage du modèle sur les résultats d'essais menés à haute température par [Chang *et al.*, 2006] pour la compression et [Felicetti et Gambarova, 1999] pour la traction. Les recalages sont réalisés à 20°C, 105°C, 250°C et 400°C. Le comportement à 250°C est calculé par interpolation des résultats obtenus à 250°C et 300°C.

Les valeurs des différents paramètres sont données dans la table B.5 :

**TABLE B.5:** Paramètres de mazars après identification à hautes températures

	$E$	$\nu$	$\varepsilon_{d0}$	$A^{\text{tr}}$	$B^{\text{tr}}$	$A^{\text{cp}}$	$B^{\text{cp}}$	$K$
20°C	20070	0.17	0.00016	0.63	6173.3	3.57	2268.5	0.7
105°C	19359	0.17	0.00016	0.67	6859.3	2.58	1998.7	0.7
250°C	11028	0.17	0.00014	0.75	3608.7	5.53	2055.4	0.7
400°C	6819	0.17	0.00011	0.33	5141.4	4.02	1459.1	0.7



**FIGURE B.6:** Courbes  $\sigma$ - $\varepsilon$  de mazars issues de l'identification à hautes températures, en compression (a) et traction (b)

La figure B.6 montre que l'identification à hautes températures (dès 250°C) est plus difficile à réaliser sur la compression. Ceci est dû aux conditions différentes dans lesquelles ont été réalisés les essais de traction et de compression. Les résultats de l'identification apparaissent toutefois satisfaisants dans la mesure où la contribution du béton à la réponse en flambement de la plaque se traduira essentiellement par un bridage de certains modes de flambement. Aux températures intermédiaires, les valeurs des paramètres seront interpolées.



## Conclusion

Parmi les lois de béton implémentées dans *Code\_Aster*, quatre lois de comportement se dégagent pour modéliser le comportement du béton, dont trois basées sur la mécanique de l'endommagement (*endo\_isot\_beton*, *endo\_orth\_beton* et *mazars*) et la dernière sur une formulation elasto-plastique (*beton\_double\_dp*). La loi *endo\_orth\_beton* permet de tenir compte de l'anisotropie du matériau mais présente des difficultés de convergence et ne permet pas de tenir compte de la dilatation thermique du matériau. *Endo\_isot\_beton* ne permet pas de modéliser le comportement adoucissant en compression. Enfin le modèle *beton\_double\_dp* présente des difficultés de convergence et ne tient pas compte de la perte de raideur avec la propagation des fissures. Ces différentes raisons nous ont amené à sélectionner le modèle de *mazars*.

Nous avons ensuite identifié les paramètres à hautes températures sur la base de résultats d'essais de compression et de traction issus de la littérature. La difficulté à recueillir des données exploitables sur le comportement post-pic à hautes températures nous a poussé à considérer les résultats de chercheurs différents. Il en résulte une bonne représentativité du comportement de traction au détriment du comportement en compression. Cependant, le rôle du béton dans la réponse au voilement local de la plaque en acier étant d'un ordre inférieur à la contribution de la tôle proprement considérée, les approximations réalisées restent acceptables.

## Annexe C

# Erreur de couplage : compléments aux développements en série

### Introduction

Nous avons établi au chapitre II section 3 les équations de la température (2.45) et de la dérivée  $i$ -ème  $\frac{\partial^i \theta}{\partial \bar{r}^i}$  (2.47a) et (2.47b) écrites sous forme de série entière. Nous précisons ici leur écriture récursive et vérifions les vitesses de convergence de ces séries.

### 1 Existence des séries dérivées de la fonction erreur

Soit la fonction erreur définie par  $\text{erf} : x \longrightarrow \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$  dont nous rappelons le développement en série entière :  $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$ . Nous montrons ici que  $\forall i \in \mathbb{N} \frac{d^i \text{erf}}{dx^i}$  est décomposable en série entière et que la dérivée de la somme correspond à la somme des dérivées.

**Démonstration 1 :** Montrons d'abord que la série est convergente de rayon  $+\infty$ .

Soit la suite  $u_n$  définie par :  $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$ . L'application de la règle de d'Alembert pour les séries entières donne :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{2n+1}{2n+3} \frac{x^2}{n+1} \longrightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty \quad (\text{C.1})$$

Et la série converge absolument  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Son rayon de convergence vaut donc  $R = +\infty$ . Par théorème, ses dérivées sont absolument convergentes de même rayon de convergence.

Il vient donc :

$$\frac{d \text{erf}}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_0^\infty (-1)^n \frac{d}{dx} \left( \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \right) \quad (\text{C.2})$$

Et par récurrence :

$$\frac{d^i \operatorname{erf}}{dx^i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{d^i}{dx^i} \left( \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) n!} \right) \quad (\text{C.3})$$

Ce qui établit l'existence de la décomposition en série entière des dérivées de la fonction erreur.

## 2 Écriture récursive des développements en série de la température et ses dérivées

On rappelle ici les équations établies au chapitre II section 3 pour la température (2.45) et ses dérivées (2.47a) et (2.47b).

$$\tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{\tau}) - \tilde{\theta}_c = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_0^{\infty} (-1)^k a_k \tilde{\tau}_n^{-(k+\frac{1}{2})} \quad (\text{C.4a})$$

$$\frac{\partial^i \tilde{\theta}_n}{\partial \tilde{\tau}_n^i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_c) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+i} b_k^{(i)} \tilde{\tau}_n^{-(k+i+\frac{1}{2})} \quad (\text{C.4b})$$

Avec  $a_k = \left( \frac{L^*}{2\sqrt{\alpha^* \tau^*}} \right)^{2k+1} \frac{1}{(2k+1) k!} \left( \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^{\text{eq}}}} \right)^{2k+1}$  et  $b_k^{(i)} = \frac{1}{2^i} \frac{1}{(2k+1)} \frac{(2[k+i])!}{(k+i)! (2k)!} \left( \frac{L^*}{2\sqrt{\alpha^* \tau^*}} \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^{\text{eq}}}} \right)^{2k+1}$ .  
On introduit alors les suites  $u_n$  et  $v_n$  définies par :

$$u_n(t) = (-1)^n a_n \tilde{\tau}^{-(n+\frac{1}{2})} \quad (\text{C.5a})$$

$$v_n^{(i)}(t) = (-1)^{n+i} b_n^{(i)} \tilde{\tau}^{-(n+i+\frac{1}{2})} \quad (\text{C.5b})$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= (-1) \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{1}{\tilde{\tau}} \\ &= (-1) \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}} (\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_c) \left( \frac{L^*}{2\sqrt{\alpha^* \tau^*}} \right)^{2n+3} \frac{1}{(2n+3) (n+1)!} \left( \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^{\text{eq}}}} \right)^{2n+3}}{\frac{2}{\sqrt{\pi}} (\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_c) \left( \frac{L^*}{2\sqrt{\alpha^* \tau^*}} \right)^{2n+1} \frac{1}{(2n+1) n!} \left( \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^{\text{eq}}}} \right)^{2n+1}} \frac{1}{\tilde{\tau}} \\ &= (-1) \frac{L^{*2}}{4 (\alpha^* \tau^*)} \frac{(2n+1)}{(2n+3) (n+1)} \left( \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^{\text{eq}}}} \right)^2 \frac{1}{\tilde{\tau}} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
 \frac{v_{n+1}}{v_n} &= (-1) \frac{b_{n+1}^{(i)}}{b_n^{(i)}} \frac{1}{\tilde{\tau}} \\
 &= (-1) \frac{a_{n+1} \left( \prod_{j=0}^{i-1} (n+1+j+\frac{1}{2}) \right)}{a_n \left( \prod_{j=0}^{i-1} (n+j+\frac{1}{2}) \right)} \frac{1}{\tilde{\tau}} \\
 &= (-1) \frac{L^{*2}}{4 (\alpha^* \tau^*)} \frac{(2n+1)}{(2n+3)(n+1)} \left( \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^{eq}}} \right)^2 \frac{\left( \prod_{j=1}^i (n+j+\frac{1}{2}) \right)}{\left( \prod_{j=0}^{i-1} (n+j+\frac{1}{2}) \right)} \frac{1}{\tilde{\tau}} \\
 &= (-1) \frac{L^{*2}}{4 (\alpha^* \tau^*)} \frac{(2n+1)}{(2n+3)(n+1)} \left( \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^{eq}}} \right)^2 \frac{2n+2i+1}{(2n+1)} \frac{1}{\tilde{\tau}} \\
 &= (-1) \frac{L^{*2}}{4 (\alpha^* \tau^*)} \frac{(2n+2i+1)}{(2n+3)(n+1)} \left( \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^{eq}}} \right)^2 \frac{1}{\tilde{\tau}}
 \end{aligned}$$

Finalement les termes se calculent récursivement avec :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= (-1) \frac{L^{*2}}{4 (\alpha^* \tau^*)} \frac{(2n+1)}{(2n+3)(n+1)} \left( \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^{eq}}} \right)^2 \frac{1}{\tilde{\tau}} u_n \\ u_0 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_c) \frac{L^*}{2 \sqrt{\alpha^* \tau^*}} \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^{eq}}} \tilde{\tau}^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (C.8a)$$

$$\begin{cases} v_{n+1} &= (-1) \frac{L^{*2}}{4 (\alpha^* \tau^*)} \frac{(2n+2i+1)}{(2n+3)(n+1)} \left( \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^{eq}}} \right)^2 \frac{1}{\tilde{\tau}} v_n \\ v_0^{(i)} &= (-1)^{i-1} \frac{(\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_c)}{2^{i-1} \sqrt{\pi}} \frac{(2i)!}{(i)!} \left( \frac{L^*}{2 \sqrt{\alpha^* \tau^*}} \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^{eq}}} \right) \tilde{\tau}^{-(i+\frac{1}{2})} \end{cases} \quad (C.8b)$$

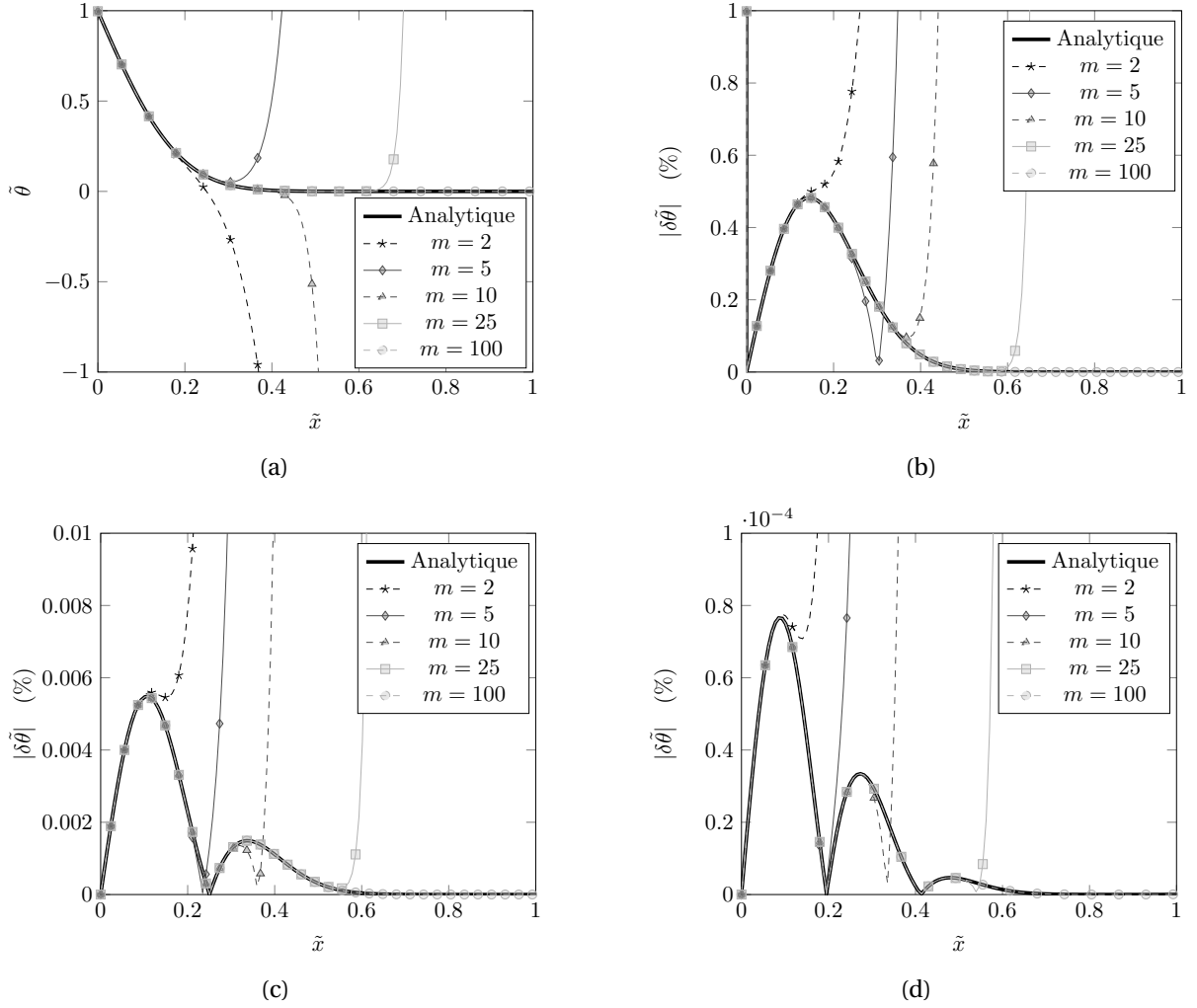
### 3 Vitesse de convergence des séries

Cette partie présente les allures des familles de polynômes approchant l'écart en température  $\tilde{\theta} : \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \tilde{\tau}_n^{-(k+\frac{1}{2})}$  et l'erreur  $\delta \tilde{\theta} : \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_c) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+i} b_k^{(i)} \tilde{\tau}_n^{-(k+i+\frac{1}{2})}$ . Les allures sont tracées pour différentes valeurs de  $m$  dans le cas où la grandeur sans dimension  $\tilde{x}$  varie seule (figure C.1) et où le temps sans dimension  $\tilde{\tau}$  varie seul (figure C.2). Les références pour l'adimensionnement sont prises conformes aux hypothèses réalisées au chapitre II, section 2.2. Il vient ainsi  $\tau^* \approx 1$ s.

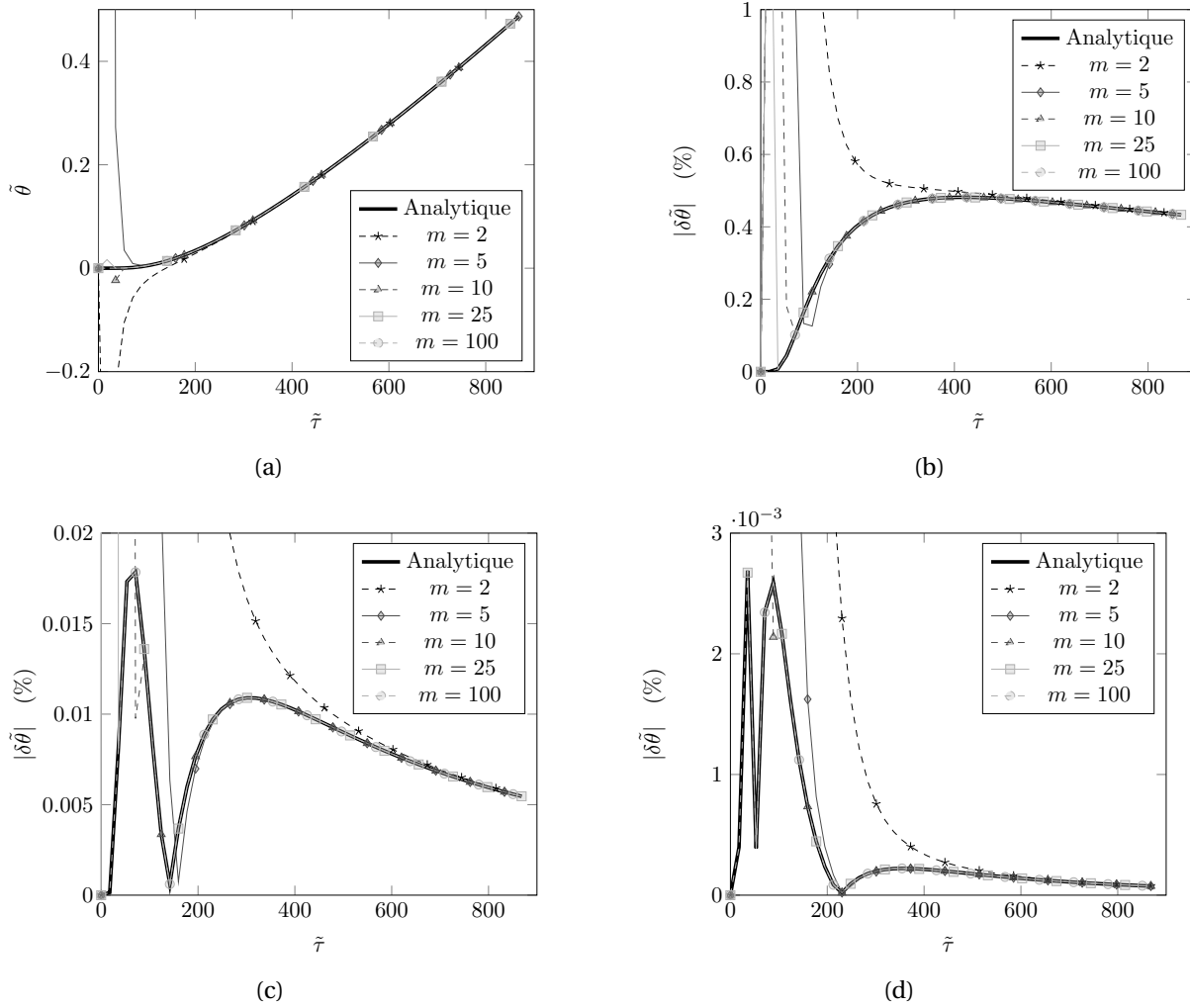
Selon toute attente, augmenter l'ordre  $m$  affecte considérablement la conformité de la réponse. On peut considérer que la solution a convergé pour  $m = 100$  vers la réponse analytique attendue. Il est intéressant de remarquer que la divergence se produit pour les valeurs importantes de la variable d'espace (figure C.1). Au contraire pour la variable temporelle, augmenter l'ordre  $m$  de l'approximation polynomiale permet de corriger la réponse aux temps faibles (figure C.2). Ce comportement s'explique par le couplage spatio-temporel en  $\tilde{x}/\sqrt{\tilde{\tau}}$ .

On note une légère perte de précision avec chaque dérivation successive. Ainsi en augmentant l'ordre de l'erreur, on observe que la divergence est légèrement précipitée (figures C.1a à C.1b et figures C.2a à C.2b).

Pour finir les figures C.1a à C.1b et C.2a à C.2b mettent en valeur la corrélation entre ordre de l'erreur et nombre de maximums locaux respectivement égaux. Ainsi, une erreur du premier ordre présente un maximum local (figure C.1a) tandis qu'une erreur du second ordre en présentera deux (figure C.1b). Ce constat explique la formation des branches divergentes observables dans la figure 2.19a.



**FIGURE C.1:** Approximations, à  $\tau = \tau_f$ , à l'ordre  $m$  de la température  $\tilde{\theta}$  (a), de l'erreur  $\delta\tilde{\theta}$  d'ordre 1 (b), de l'erreur  $\delta^2\tilde{\theta}$  d'ordre 2 (c) et de l'erreur  $\delta^3\tilde{\theta}$  d'ordre 3 (d)



**FIGURE C.2:** Approximations, en  $\tilde{x} = 0.1$ , à l'ordre  $m$  de la température  $\tilde{\theta}$  (a), de l'erreur  $\delta\tilde{\theta}$  d'ordre 1 (b), de l'erreur  $\delta\tilde{\theta}\tilde{\theta}$  d'ordre 2 (c) et de l'erreur  $\delta\tilde{\theta}\tilde{\theta}\tilde{\theta}$  d'ordre 3 (d)

## Conclusion

Dans cette annexe, trois précisions importantes ont été données. D'abord, nous avons justifié l'existence des séries dérivées, nécessaire à l'approximation de l'erreur de couplage. Puis, nous avons précisé les écritures récursives des décompositions en séries pour faciliter leur implémentation numérique. Finalement, nous avons montré qu'un ordre d'approximation des séries  $m$  important ( $m = 100$ ) devait être prévu pour obtenir une convergence vers la solution analytique, ce qui nécessite un calcul via l'outil informatique.



## Annexe D

# Solutions analytiques particulières de voilement thermique de plaques minces

### Introduction

Cette annexe donne des précisions sur le développement de la solution analytique correspondant au panneau élémentaire d'élément modulaire SC. Le détail des calculs correspondant à la solution analytique retenue dans le chapitre III sera donné au paragraphe 1.1. La première partie de cette annexe sera également l'occasion de proposer des solutions analytiques pour des cas de chargement plus complexes (anisotherme, sollicitations mécaniques).

La seconde partie de cette annexe proposera une confrontation des résultats analytiques obtenus pour la plaque simplement appuyée par la méthode énergétique de Trefftz et la méthode de Galerkin.

La dernière partie suggère une méthode approchée pour écrire la déformée au flambage d'une tôle plane rectangulaire dont les sommets sont à déplacements nuls soumise à un chargement quelconque.

### 1 Solutions approchées particulières

Dans cette partie, nous présentons les planches de calculs permettant d'obtenir les expressions du déplacement hors-plan  $w(T)$  en régimes pré- et post-critique ainsi que pour la solution raccordée. Les calculs seront détaillés dans le cas représentatif de la maille élémentaire d'un panneau SC décrite au chapitre III en présence d'un chargement isotherme  $T(x, y) = T_c$ . Ce cas sera dénommée **SC** pour marquer la correspondance avec la structure homonyme.

À partir de la démarche présentée et des résultats, on s'intéressera à établir les expressions pour différentes conditions limites incluant la plaque simplement appuyée sur chacun de ses bords (**AAAA**) et la plaque encastrée sur chacun de ses bords (**EEEE**). La confrontation des solutions **AAAA**, **EEEE**, **SC** avec les résultats issus de la modélisation numérique permet-



tra de déterminer l'expression du coefficient de pondération  $\omega_M$ .

On s'intéressera également au problème anisotherme  $T(x, y) = T_c(x, y)$ . Compte tenu des propriétés thermiques de l'acier, le moment thermique sera toujours pris nul :  $M^{\text{th}} = 0$ . Pour finir on développera une solution prenant en compte des efforts plans mécaniques.

Plusieurs niveaux de simplification des hypothèses seront enfin proposés pour aboutir à une formule analytique relativement simple, utilisable dans un contexte d'ingénierie.

## 1.1 Cas SC isotherme

Ce paragraphe présente les planches de calculs relatives à l'obtention de la solution décrite dans le paragraphe 2.2 du chapitre III

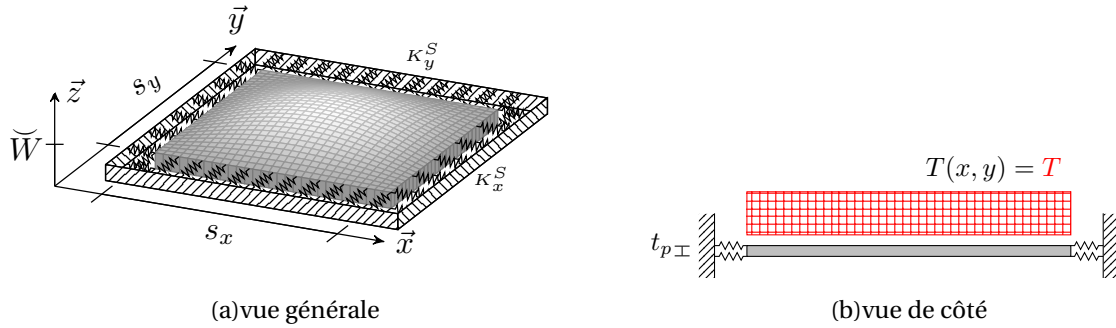


FIGURE D.1: Plaque SC (a) avec chargement isotherme (b)

On considère pour ce faire une plaque initialement déformée ( $\tilde{w}(x, y) \neq 0$ ) de dimensions  $s_x, s_y, t_p$  dans les directions respectives  $\vec{x}, \vec{y}$  et  $\vec{z}$  (figure D.1a). Des ressorts de raideurs  $K_x^S$  et  $K_y^S$  brident respectivement les déplacements plans en  $\vec{x}, \vec{y}$ . Afin de tenir compte du bridage partiel des rotations aux bords, on introduit le moment de correction  $M_{\text{corr}}$  (voir figure 3.12).

Le chargement est isotherme si bien que  $T(x, y) = T$  (figure D.1b).

### 1.1.1 Planches de calculs : régime pré-critique

Expressions des solutions approchées :

$$\tilde{w} = W \sin\left(\frac{m\pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{s_y}\right) \quad (m, n) \in \mathbb{N}^2$$

$$\tilde{\tilde{w}} := \tilde{W} \sin\left(\frac{m\pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{s_y}\right)$$

Calcul des déformations :

— Dilatation thermique :

$$\varepsilon^{\text{th}} = \beta \Delta T$$

— déformation élastique

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^e &= -\frac{1}{2} \check{w}_{,x}^2 - \varepsilon^{\text{th}} + \frac{2f^S}{K_x^S s_x} \\
 &= -\frac{m^2 \pi^2}{2 s_x^2} \check{W}^2 \left( \cos \left( \frac{m \pi x}{s_x} \right) \right)^2 \left( \sin \left( \frac{n \pi y}{s_y} \right) \right)^2 - \beta \Delta T + \frac{2f^S}{K_x^S s_x} \\
 \varepsilon_{yy}^e &= -\frac{1}{2} \check{w}_{,y}^2 - \varepsilon^{\text{th}} + \frac{2f^S}{K_y^S s_y} \\
 &= -\frac{n^2 \pi^2}{2 s_y^2} \check{W}^2 \left( \cos \left( \frac{n \pi y}{s_y} \right) \right)^2 \left( \sin \left( \frac{m \pi x}{s_x} \right) \right)^2 - \beta \Delta T + \frac{2f^S}{K_y^S s_y} \\
 \varepsilon_{xy}^e &= -\frac{1}{2} \check{w}_{,x} \check{w}_{,y} \\
 &= -\frac{n m \pi^2}{2 s_x s_y} \check{W}^2 \cos \left( \frac{m \pi x}{s_x} \right) \sin \left( \frac{n \pi y}{s_y} \right) \sin \left( \frac{m \pi x}{s_x} \right) \cos \left( \frac{n \pi y}{s_y} \right)
 \end{aligned}$$

**Calcul des efforts :**

$$\begin{aligned}
 N_{xx} &= \frac{E t_p}{(1 - \nu^2)} (\varepsilon_{xx}^e + \nu \varepsilon_{yy}^e) \\
 &= \frac{E t_p}{1 - \nu^2} \left[ \left( -\frac{m^2 \pi^2}{2 s_x^2} \check{W}^2 \cos \left( \frac{m \pi x}{s_x} \right) \sin \left( \frac{n \pi y}{s_y} \right)^2 - \beta \Delta T + \frac{2f^S}{K_x^S s_x} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \nu \left( -\frac{n^2 \pi^2}{2 s_y^2} \check{W}^2 \sin \left( \frac{m \pi x}{s_x} \right) \cos \left( \frac{n \pi y}{s_y} \right)^2 - \beta \Delta T + \frac{2f^S}{K_y^S s_y} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{yy} &= \frac{E t_p}{(1 - \nu^2)} (\varepsilon_{yy}^e + \nu \varepsilon_{xx}^e) \\
 &= \frac{E t_p}{1 - \nu^2} \left[ \left( -\frac{n^2 \pi^2}{2 s_y^2} \check{W}^2 \cos \left( \frac{n \pi y}{s_y} \right) \sin \left( \frac{m \pi x}{s_x} \right)^2 - \beta \Delta T + \frac{2f^S}{K_y^S s_y} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \nu \left( -\frac{m^2 \pi^2}{2 s_x^2} \check{W}^2 \sin \left( \frac{n \pi y}{s_y} \right) \cos \left( \frac{m \pi x}{s_x} \right)^2 - \beta \Delta T + \frac{2f^S}{K_x^S s_x} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{xy} &= \frac{E t_p}{2(1 + \nu)} \varepsilon_{xy}^e \\
 &= -\frac{m n \pi^2 E t_p}{2(1 + \nu) s_x s_y} \check{W}^2 \sin \left( \frac{m \pi x}{s_x} \right) \cos \left( \frac{m \pi x}{s_x} \right) \sin \left( \frac{n \pi y}{s_y} \right) \cos \left( \frac{n \pi y}{s_y} \right)
 \end{aligned}$$

**Calcul du moment de correction :**

— Expression générale :

$$\begin{aligned} M_{corr} &= \frac{\omega_M E t_p^3}{12(1+\nu)} \left( (\ddot{w} - \check{w})_{,xx} + (\ddot{w} - \check{w})_{,yy} \right) \\ &= \frac{\omega_M E t_p^3}{12(1+\nu)} \left[ \frac{m^2 \pi^2}{s_x^2} (\check{W} - W) \sin\left(\frac{m\pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{s_y}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{n^2 \pi^2}{s_y^2} (\check{W} - W) \sin\left(\frac{m\pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{s_y}\right) \right] \end{aligned}$$

— Coefficient de Fourier :

$$\begin{aligned} m^f &= \frac{4}{s_x s_y} \int_0^{s_x} \int_0^{s_y} M_{corr} \sin\left(\frac{m\pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{s_y}\right) dx dy \\ &= \frac{\omega_M \pi E t_p^3}{12(1+\nu) s_x^2 s_y^2} \left[ \check{W} (m^2 s_y^2 + n^2 s_x^2) - W (m^2 s_y^2 + n^2 s_x^2) \right] \end{aligned}$$

**Résolution par la méthode de Galerkin**

— Fonction erreur :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= D \left\{ W [\Psi_{,xxxx} + \Psi_{,yyyy} + 2\Psi_{,xxyy}] - \check{W} [\check{\Psi}_{,xxxx} + \check{\Psi}_{,yyyy} + 2\check{\Psi}_{,xxyy}] \right\} \\ &\quad - \left\{ C \left[ -\frac{1}{2} \check{W}^2 (\check{\Psi}_{,x}^2 + \nu \check{\Psi}_{,y}^2) \right] + N_x^S + \nu N_y^S - \frac{N^{th}}{(1-\nu)} \right\} \left\{ \check{W} \check{\Psi}_{,xx} \right\} \\ &\quad - \left\{ C \left[ -\frac{1}{2} \check{W}^2 (\check{\Psi}_{,y}^2 + \nu \check{\Psi}_{,x}^2) \right] + N_y^S + \nu N_x^S - \frac{N^{th}}{(1-\nu)} \right\} \left\{ \check{W} \check{\Psi}_{,yy} \right\} \\ &\quad - 2 \frac{E t_p}{(1+\nu)} \left\{ -\check{W}^2 \check{\Psi}_{,x} \check{\Psi}_{,y} \right\} \left\{ \check{W} \check{\Psi}_{,xy} \right\} \\ &\quad + \left\{ m_1^f W + m_2^f \check{W} \right\} \Psi_{,xx} + \left\{ m_1^f W + m_2^f \check{W} \right\} \Psi_{,yy} - 2 \left\{ m_1^f W + m_2^f \check{W} \right\} \Psi_{,xy} \quad (D.1) \end{aligned}$$

— Forme de la solution :

$$\int_0^{s_x} \int_0^{s_y} \mathcal{E} \Psi dx dy \longrightarrow \gamma_5 W + \gamma_6 = 0$$

— Coefficients de Galerkin :

$$\begin{aligned}
 \gamma_5 &= \int_0^{s_x} \int_0^{s_y} \left\{ D (\Psi_{,xx} + 2\Psi_{,xy} + \Psi_{,yy}) + \left\{ C \left[ \frac{1}{2} \tilde{W}^2 (\tilde{\Psi}_{,x}^2 + \nu \tilde{\Psi}_{,y}^2) \right] + N_x^S + \nu N_y^S - \frac{N^{\text{th}}}{(1-\nu)} \right\} \Psi_{,xx} \right. \\
 &\quad + \left\{ C \left[ \frac{1}{2} \tilde{W}^2 (\tilde{\Psi}_{,y}^2 + \nu \tilde{\Psi}_{,x}^2) \right] + N_y^S + \nu N_x^S - \frac{N^{\text{th}}}{(1-\nu)} \right\} \Psi_{,yy} + \frac{2 E t_p}{(1+\nu)} \tilde{W}^2 \tilde{\Psi}_{,x} \tilde{\Psi}_{,y} \Psi_{,xy} \\
 &\quad \left. + m_1^f [\Psi_{,xx} - 2\Psi_{,xy} + \Psi_{,yy}] \right\} \Psi dx dy \\
 &= 8 h^2 \pi^2 K_y^S K_x^S \left( -m^4 \omega_M s_y^4 - s_x^4 \omega_M n^4 + s_x^4 \nu \omega_M n^4 - 2 m^2 n^2 s_x^2 s_y^2 \right. \\
 &\quad \left. + m^4 \nu \omega_M s_y^4 - 2 m^2 \omega_M n^2 s_x^2 s_y^2 + 2 m^2 \nu \omega_M n^2 s_x^2 s_y^2 - m^4 s_y^4 - s_x^4 n^4 \right) \frac{1}{\tilde{W}} \quad (\text{D.2a})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_6 &= \int_0^{s_x} \int_0^{s_y} \left\{ -D (\tilde{\Psi}_{,xx} + 2\tilde{\Psi}_{,xy} + \tilde{\Psi}_{,yy}) - \left\{ C \left[ \frac{1}{2} \tilde{W}^2 (\tilde{\Psi}_{,x}^2 + \nu \tilde{\Psi}_{,y}^2) \right] + N_x^S + \nu N_y^S - \frac{N^{\text{th}}}{(1-\nu)} \right\} \tilde{\Psi}_{,xx} \right. \\
 &\quad - \left\{ C \left[ \frac{1}{2} \tilde{W}^2 (\tilde{\Psi}_{,y}^2 + \nu \tilde{\Psi}_{,x}^2) \right] + N_y^S + \nu N_x^S - \frac{N^{\text{th}}}{(1-\nu)} \right\} \tilde{\Psi}_{,yy} - \frac{2 E t_p}{(1+\nu)} \tilde{W}^2 \tilde{\Psi}_{,x} \tilde{\Psi}_{,y} \tilde{\Psi}_{,xy} \\
 &\quad \left. + m_2^f [\Psi_{,xx} - 2\Psi_{,xy} + \Psi_{,yy}] \right\} \tilde{W} \Psi dx dy \\
 &= 8 t_p^2 \pi^2 s_x^4 \nu \omega_M n^4 K_y^S K_x^S - 24 \pi^2 m^2 \tilde{W}^2 n^2 \nu s_x^2 s_y^2 K_y^S K_x^S - 16 t_p^2 \pi^2 m^2 n^2 s_x^2 s_y^2 K_y^S K_x^S \\
 &\quad - 8 t_p^2 \pi^2 m^4 \omega_M s_y^4 K_y^S K_x^S - 16 t_p^2 \pi^2 m^2 \omega_M n^2 s_x^2 s_y^2 K_y^S K_x^S - 8 t_p^2 \pi^2 s_x^4 \omega_M n^4 K_y^S K_x^S \\
 &\quad + 8 t_p^2 \pi^2 m^4 \nu \omega_M s_y^4 K_y^S K_x^S + 16 t_p^2 \pi^2 m^2 \nu \omega_M n^2 s_x^2 s_y^2 K_y^S K_x^S - 96 m^2 \beta \Delta T \nu s_x^2 s_y^4 K_y^S K_x^S \\
 &\quad - 96 m^2 \beta \Delta T s_x^2 s_y^4 K_y^S K_x^S - 96 s_x^4 n^2 \nu \beta \Delta T s_y^2 K_y^S K_x^S - 96 s_x^4 n^2 \beta \Delta T s_y^2 K_y^S K_x^S \\
 &\quad + 192 s_x^4 n^2 f^S s_y K_y^S K_x^S + 192 m^2 f^S s_x s_y^4 K_y^S K_x^S - 9 \pi^2 s_x^4 \tilde{W}^2 n^4 K_y^S K_x^S - 9 \pi^2 m^4 \tilde{W}^2 s_y^4 K_y^S K_x^S \\
 &\quad - 8 t_p^2 \pi^2 s_x^4 n^4 K_y^S K_x^S - 8 t_p^2 \pi^2 m^4 s_y^4 K_y^S K_x^S + 192 m^2 \nu f^S s_x^2 s_y^3 K_x^S + 192 n^2 \nu f^S s_x^3 s_y^2 K_y^S \\
 &\quad + 6 \pi^2 m^2 \tilde{W}^2 n^2 s_x^2 s_y^2 K_y^S K_x^S \quad (\text{D.2b})
 \end{aligned}$$

— Ordonnée à l'origine :

$$W_0 = W(\delta T = 0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( 8 t_p^2 \pi^2 s_x^4 \nu \omega_M n^4 K_y^S K_x^S - 24 \pi^2 m^2 \tilde{W}^2 n^2 \nu s_x^2 s_y^2 K_y^S K_x^S - 16 t_p^2 \pi^2 m^2 n^2 s_x^2 s_y^2 K_y^S K_x^S \right. \\
 &\quad - 8 t_p^2 \pi^2 m^4 \omega_M s_y^4 K_y^S K_x^S - 16 t_p^2 \pi^2 m^2 \omega_M n^2 s_x^2 s_y^2 K_y^S K_x^S - 8 t_p^2 \pi^2 s_x^4 \omega_M n^4 K_y^S K_x^S \\
 &\quad + 8 t_p^2 \pi^2 m^4 \nu \omega_M s_y^4 K_y^S K_x^S + 16 t_p^2 \pi^2 m^2 \nu \omega_M n^2 s_x^2 s_y^2 K_y^S K_x^S + 192 s_x^4 n^2 f^S s_y K_x^S \\
 &\quad + 192 m^2 f^S s_x s_y^4 K_y^S K_x^S - 9 \pi^2 s_x^4 \tilde{W}^2 n^4 K_y^S K_x^S - 9 \pi^2 m^4 \tilde{W}^2 s_y^4 K_y^S K_x^S - 8 t_p^2 \pi^2 s_x^4 n^4 K_y^S K_x^S \\
 &\quad - 8 t_p^2 \pi^2 m^4 s_y^4 K_y^S K_x^S + 192 m^2 \nu f^S s_x^2 s_y^3 K_x^S + 192 n^2 \nu f^S s_x^3 s_y^2 K_y^S \\
 &\quad \left. + 6 \pi^2 m^2 \tilde{W}^2 n^2 s_x^2 s_y^2 K_y^S K_x^S \right) / \left( 8 t_p^2 \pi^2 K_y^S K_x^S \left( -m^4 \omega_M s_y^4 - s_x^4 \omega_M n^4 + s_x^4 \nu \omega_M n^4 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + -2 m^2 n^2 s_x^2 s_y^2 m^4 \nu \omega_M s_y^4 - 2 m^2 \omega_M n^2 s_x^2 s_y^2 + 2 m^2 \nu \omega_M n^2 s_x^2 s_y^2 - m^4 s_y^4 - s_x^4 n^4 \right) \frac{1}{\tilde{W}} \right)
 \end{aligned}$$

— Solution :

$$\begin{aligned} W_{af} &= W(\Delta T) - W_0 \\ W_{af} &= \zeta_1 \Delta T \end{aligned} \quad (\text{D.3a})$$

avec :

$$\zeta_1 = \frac{\zeta_{11}}{\zeta_{12}} \quad (\text{D.3b})$$

et :

$$\begin{aligned} \zeta_{11} &= \frac{1}{8} \tilde{W} \left( -96 m^2 \beta \nu s_x^2 s_y^4 K_y^S K_x^S - 96 m^2 \beta s_x^2 s_y^4 K_y^S K_x^S \right. \\ &\quad \left. - 96 s_x^4 n^2 \nu \beta s_y^2 K_y^S K_x^S - 96 s_x^4 n^2 \beta s_y^2 K_y^S K_x^S \right) \end{aligned} \quad (\text{D.3c})$$

$$\begin{aligned} \zeta_{12} &= t_p^2 P i^2 K_y^S K_x^S \left( -m^4 \omega_M s_y^4 - s_x^4 \omega_M n^4 + s_x^4 \nu \omega_M n^4 - 2 m^2 n^2 s_x^2 s_y^2 \right. \\ &\quad \left. + m^4 \nu \omega_M s_y^4 - 2 m^2 \omega_M n^2 s_x^2 s_y^2 + 2 m^2 \nu \omega_M n^2 s_x^2 s_y^2 - m^4 s_y^4 - s_x^4 n^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{D.3d})$$

### 1.1.2 Planches de calculs : régime post-critique

Expressions des solutions approchées :

$$\check{w} = W \sin\left(\frac{m\pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{s_y}\right) \quad (m, n) \in \mathbb{N}^2$$

$$\check{\check{w}} := \tilde{W} \sin\left(\frac{p\pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{s_y}\right) \quad (p, q) \in \mathbb{N}^2$$

**Calcul des déformations :**

— Dilatation thermique :

$$\varepsilon^{\text{th}} = \beta \Delta T$$

— Déformation élastique

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^e &= \frac{1}{2} \check{w}_{,x}^2 - \frac{1}{2} \check{\check{w}}_{,x}^2 - \varepsilon^{\text{th}} + \frac{2f^S}{K_x^S s_x} \\ &= \frac{\pi^2}{2 s_x^2} \left[ m^2 W^2 \left( \cos\left(\frac{m\pi x}{s_x}\right) \right)^2 \left( \sin\left(\frac{n\pi y}{s_y}\right) \right)^2 - p^2 \tilde{W}^2 \left( \cos\left(\frac{p\pi x}{s_x}\right) \right)^2 \left( \sin\left(\frac{q\pi y}{s_y}\right) \right)^2 \right] \\ &\quad - \beta \Delta T + \frac{2f^S}{K_x^S s_x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{yy}^e &= \frac{1}{2} \check{w}_{,y}^2 - \frac{1}{2} \check{\check{w}}_{,y}^2 - \varepsilon^{\text{th}} + \frac{2f^S}{K_y^S s_y} \\
&= \frac{\pi^2}{2 s_y^2} \left[ n^2 W^2 \left( \sin \left( \frac{m\pi x}{s_x} \right) \right)^2 \left( \cos \left( \frac{n\pi y}{s_y} \right) \right)^2 - q^2 \check{W}^2 \left( \sin \left( \frac{p\pi x}{s_x} \right) \right)^2 \left( \cos \left( \frac{q\pi y}{s_y} \right) \right)^2 \right] \\
&\quad - \beta \Delta T + \frac{2f^S}{K_y^S s_y} \\
\varepsilon_{xy}^e &= \frac{1}{2} \check{w}_{,x} \check{w}_{,y} - \frac{1}{2} \check{\check{w}}_{,x} \check{\check{w}}_{,y} \\
&= \frac{\pi^2}{2 s_x s_y} \left( n m W^2 \cos \left( \frac{m\pi x}{s_x} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{s_y} \right) \sin \left( \frac{m\pi x}{s_x} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{s_y} \right) \right. \\
&\quad \left. - p q \check{W}^2 \cos \left( \frac{p\pi x}{s_x} \right) \sin \left( \frac{q\pi y}{s_y} \right) \sin \left( \frac{p\pi x}{s_x} \right) \cos \left( \frac{q\pi y}{s_y} \right) \right)
\end{aligned}$$

**Calcul des efforts :**

$$\begin{aligned}
N_{xx} &= \frac{E t_p}{(1 - \nu^2)} (\varepsilon_{xx}^e + \nu \varepsilon_{yy}^e) \\
&= \frac{E t_p}{1 - \nu^2} \left\{ \frac{\pi^2}{2 s_x^2} \left[ m^2 W^2 \left( \cos \left( \frac{m\pi x}{s_x} \right) \right)^2 \left( \sin \left( \frac{n\pi y}{s_y} \right) \right)^2 - p^2 \check{W}^2 \left( \cos \left( \frac{p\pi x}{s_x} \right) \right)^2 \left( \sin \left( \frac{q\pi y}{s_y} \right) \right)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. - \beta \Delta T + \frac{2f^S}{K_x^S s_x} + \nu \left( \frac{\pi^2}{2 s_y^2} \left[ n^2 W^2 \left( \sin \left( \frac{m\pi x}{s_x} \right) \right)^2 \left( \cos \left( \frac{n\pi y}{s_y} \right) \right)^2 \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - q^2 \check{W}^2 \left( \cos \left( \frac{p\pi x}{s_x} \right) \right)^2 \left( \sin \left( \frac{q\pi y}{s_y} \right) \right)^2 \right] - \beta \Delta T + \frac{2f^S}{K_y^S s_y} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{yy} &= \frac{E t_p}{(1 - \nu^2)} (\varepsilon_{yy}^e + \nu \varepsilon_{xx}^e) \\
&= \frac{E t_p}{1 - \nu^2} \left\{ \frac{\pi^2}{2 s_y^2} \left[ n^2 W^2 \left( \sin \left( \frac{m\pi x}{s_x} \right) \right)^2 \left( \cos \left( \frac{n\pi y}{s_y} \right) \right)^2 - q^2 \check{W}^2 \left( \cos \left( \frac{p\pi x}{s_x} \right) \right)^2 \left( \sin \left( \frac{q\pi y}{s_y} \right) \right)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. - \beta \Delta T + \frac{2f^S}{K_y^S s_y} + \nu \left( \frac{\pi^2}{2 s_x^2} \left[ m^2 W^2 \left( \sin \left( \frac{m\pi x}{s_x} \right) \right)^2 \left( \cos \left( \frac{n\pi y}{s_y} \right) \right)^2 \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - p^2 \check{W}^2 \left( \sin \left( \frac{p\pi x}{s_x} \right) \right)^2 \left( \cos \left( \frac{q\pi y}{s_y} \right) \right)^2 \right] - \beta \Delta T + \frac{2f^S}{K_x^S s_x} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{xy} &= \frac{E t_p}{2(1 + \nu)} \varepsilon_{xy}^e \\
&= \frac{\pi^2 E t_p}{2(1 + \nu) s_x s_y} \left( n m W^2 \cos \left( \frac{m\pi x}{s_x} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{s_y} \right) \sin \left( \frac{m\pi x}{s_x} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{s_y} \right) \right. \\
&\quad \left. - p q \check{W}^2 \cos \left( \frac{p\pi x}{s_x} \right) \sin \left( \frac{q\pi y}{s_y} \right) \sin \left( \frac{p\pi x}{s_x} \right) \cos \left( \frac{q\pi y}{s_y} \right) \right)
\end{aligned}$$

**Calcul du moment de correction :**

— Expression générale :

$$\begin{aligned} M_{corr} &= \frac{\omega_M E t_p^3}{12(1+\nu)} \left( (\ddot{w} - \ddot{\tilde{w}})_{,xx} + (\ddot{w} - \ddot{\tilde{w}})_{,yy} \right) \\ &= \frac{\omega_M E t_p^3}{12(1+\nu)} \left[ \frac{\pi^2}{s_x^2} \left( p^2 \tilde{W} \sin\left(\frac{p\pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{s_y}\right) - m^2 W \sin\left(\frac{m\pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{s_y}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{s_y^2} \left( q^2 \tilde{W} \sin\left(\frac{p\pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{s_y}\right) - n^2 W \sin\left(\frac{m\pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{s_y}\right) \right) \right] \end{aligned}$$

— Coefficient de Fourier :

$$\begin{aligned} m^f &= \frac{4}{s_x s_y} \int_0^{s_x} \int_0^{s_y} M_{corr} \sin\left(\frac{m\pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{s_y}\right) dx dy \\ &= \frac{\omega_M \pi E t_p^3}{12(1+\nu) s_x^2 s_y^2} \left[ -W \left( m^2 s_y^2 + n^2 s_x^2 \right) \right] \end{aligned}$$

**Résolution par la méthode de Galerkin**

— Fonction erreur :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= D \left\{ W \left[ \Psi_{,xxxx} + \Psi_{,yyyy} + 2\Psi_{,xxyy} \right] - \tilde{W} \left[ \tilde{\Psi}_{,xxxx} + \tilde{\Psi}_{,yyyy} + 2\tilde{\Psi}_{,xxyy} \right] \right\} \\ &\quad - \left\{ C \left[ \frac{1}{2} W^2 \left( \Psi_{,x}^2 + \nu \Psi_{,y}^2 \right) - \frac{1}{2} \tilde{W}^2 \left( \tilde{\Psi}_{,x}^2 + \nu \tilde{\Psi}_{,y}^2 \right) \right] + N_x^S + \nu N_y^S - \frac{N^{th}}{(1-\nu)} \right\} \left\{ W \Psi_{,xx} - \tilde{W} \tilde{\Psi}_{,xx} \right\} \\ &\quad - \left\{ C \left[ \frac{1}{2} W^2 \left( \Psi_{,y}^2 + \nu \Psi_{,x}^2 \right) - \frac{1}{2} \tilde{W}^2 \left( \tilde{\Psi}_{,y}^2 + \nu \tilde{\Psi}_{,x}^2 \right) \right] + N_y^S + \nu N_x^S - \frac{N^{th}}{(1-\nu)} \right\} \left\{ W \Psi_{,yy} - \tilde{W} \tilde{\Psi}_{,yy} \right\} \\ &\quad - 2 \frac{E t_p}{(1+\nu)} \left\{ W^2 \Psi_{,x} \Psi_{,y} - \tilde{W}^2 \tilde{\Psi}_{,x} \tilde{\Psi}_{,y} \right\} \left\{ W \Psi_{,xy} - \tilde{W} \tilde{\Psi}_{,xy} \right\} \\ &\quad + \left\{ m_1^f W + m_2^f \tilde{W} \right\} \Psi_{,xx} + \left\{ m_1^f W + m_2^f \tilde{W} \right\} \Psi_{,yy} - 2 \left\{ m_1^f W + m_2^f \tilde{W} \right\} \Psi_{,xy} \quad (D.4) \end{aligned}$$

— Forme de la solution :

$$\int_0^{s_x} \int_0^{s_y} \mathcal{E} \Psi dx dy \longrightarrow \gamma_1 W^3 + \gamma_2 W^2 + \gamma_3 W + \gamma_4 = 0$$

— Coefficients de Galerkin :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \int_0^{s_x} \int_0^{s_y} \left\{ \frac{C}{2} \left[ \left( \Psi_{,x}^2 + \nu \Psi_{,y}^2 \right) \Psi_{,xx} + \left( \Psi_{,y}^2 + \nu \Psi_{,x}^2 \right) \Psi_{,yy} \right] - \frac{2 E t_p}{(1+\nu)} \Psi_{,x} \Psi_{,y} \Psi_{,xy} \right\} \Psi dx dy \\ &= \frac{4}{3} \pi^2 K_x^S K_y^S \left( 3 s_x^4 n^4 + 3 m^4 s_y^4 + 8 m^2 \nu n^2 s_y^2 s_x^2 - 2 m^2 n^2 s_y^2 s_x^2 \right) \quad (D.5a) \end{aligned}$$

$$\gamma_2 = \int_0^{s_x} \int_0^{s_y} \left\{ -\frac{C}{2} \left[ (\Psi_{,x}^2 + \nu \Psi_{,y}^2) \tilde{\Psi}_{,xx} + (\Psi_{,y}^2 + \nu \Psi_{,x}^2) \tilde{\Psi}_{,yy} \right] + \frac{2 E t_p}{(1 + \nu)} \Psi_{,x} \Psi_{,y} \tilde{\Psi}_{,xy} \right\} \tilde{W} \Psi dx dy$$

$$= 0 \quad (D.5b)$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 = & \int_0^{s_x} \int_0^{s_y} \left\{ D (\Psi_{,xx} + 2\Psi_{,xy} + \Psi_{,yy}) + \left\{ C \left[ \frac{1}{2} \tilde{W}^2 (\tilde{\Psi}_{,x}^2 + \nu \tilde{\Psi}_{,y}^2) \right] + N_x^S + \nu N_y^S - \frac{N^{th}}{(1 - \nu)} \right\} \Psi_{,xx} \right. \\ & + \left\{ C \left[ \frac{1}{2} \tilde{W}^2 (\tilde{\Psi}_{,y}^2 + \nu \tilde{\Psi}_{,x}^2) \right] + N_y^S + \nu N_x^S - \frac{N^{th}}{(1 - \nu)} \right\} \Psi_{,yy} + \frac{2 E t_p}{(1 + \nu)} \tilde{W}^2 \tilde{\Psi}_{,x} \tilde{\Psi}_{,y} \Psi_{,xy} \\ & + m_1^f [\Psi_{,xx} - 2\Psi_{,xy} + \Psi_{,yy}] \left. \right\} \Psi dx dy \\ = & -(-24 m^2 \beta \Delta T \nu s_y^4 s_x^2 K_x^S K_y^S + 48 s_x^4 f^S n^2 s_y K_x^S + 48 m^2 f^S s_y^4 s_x K_y^S h \\ & - 24 s_x^4 \beta \Delta T n^2 s_y^2 K_x^S K_y^S - 24 m^2 \beta \Delta T s_y^4 s_x^2 K_x^S K_y^S - 3 \pi^2 s_x^4 \tilde{W}^2 q^2 n^2 K_x^S K_y^S \\ & + 2 m^4 \pi^2 t_p^2 \omega_M s_y^4 K_x^S K_y^S - 3 m^2 \pi^2 p^2 \tilde{W}^2 s_y^4 K_x^S K_y^S + 2 \pi^2 t_p^2 s_x^4 \omega_M n^4 K_x^S K_y^S \\ & + 48 m^2 \nu f^S s_y^3 s_x^2 K_x^S + 48 \nu f^S n^2 s_y^2 s_x^3 K_y^S + 2 m^4 \pi^2 t_p^2 s_y^4 K_x^S K_y^S \\ & + 2 \pi^2 t_p^2 s_x^4 n^4 K_x^S K_y^S - 2 \pi^2 t_p^2 s_x^4 \nu \omega_M n^4 K_x^S K_y^S - 3 \pi^2 p^2 \nu \tilde{W}^2 n^2 s_y^2 s_x^2 K_x^S K_y^S \\ & - 2 m^4 \pi^2 t_p^2 \nu \omega_M s_y^4 K_x^S K_y^S + 4 m^2 \pi^2 t_p^2 \omega_M n^2 s_y^2 s_x^2 K_x^S K_y^S \\ & + 4 m^2 \pi^2 t_p^2 n^2 s_y^2 s_x^2 K_x^S K_y^S - 4 m^2 \pi^2 t_p^2 \nu \omega_M n^2 s_y^2 s_x^2 K_x^S K_y^S \\ & - 3 m^2 \pi^2 \nu \tilde{W}^2 q^2 s_y^2 s_x^2 K_x^S K_y^S - 24 s_x^4 \beta \Delta T n^2 \nu s_y^2 K_x^S K_y^S) \end{aligned} \quad (D.5c)$$

$$\begin{aligned} \gamma_4 = & \int_0^{s_x} \int_0^{s_y} \left\{ -D (\tilde{\Psi}_{,xx} + 2\tilde{\Psi}_{,xy} + \tilde{\Psi}_{,yy}) - \left\{ C \left[ \frac{1}{2} \tilde{W}^2 (\tilde{\Psi}_{,x}^2 + \nu \tilde{\Psi}_{,y}^2) \right] + N_x^S + \nu N_y^S - \frac{N^{th}}{(1 - \nu)} \right\} \tilde{\Psi}_{,xx} \right. \\ & - \left\{ C \left[ \frac{1}{2} \tilde{W}^2 (\tilde{\Psi}_{,y}^2 + \nu \tilde{\Psi}_{,x}^2) \right] + N_y^S + \nu N_x^S - \frac{N^{th}}{(1 - \nu)} \right\} \tilde{\Psi}_{,yy} - \frac{2 E h t_p}{(1 + \nu)} \tilde{W}^2 \tilde{\Psi}_{,x} \tilde{\Psi}_{,y} \tilde{\Psi}_{,xy} \\ & + m_2^f [\tilde{\Psi}_{,xx} - 2\tilde{\Psi}_{,xy} + \tilde{\Psi}_{,yy}] \left. \right\} \tilde{W} \Psi dx dy \\ = & 0 \end{aligned} \quad (D.5d)$$

— Solution :

$$W_{pf} = \sqrt{\zeta_2 \Delta T + \zeta_3} \quad (D.6a)$$

avec :

$$\begin{aligned} \zeta_2 = & -4/3 \left( -24 m^2 \beta \nu s_y^4 s_x^2 K_x^S K_y^S - 24 s_x^4 \beta n^2 s_y^2 K_x^S K_y^S \right. \\ & \left. - 24 m^2 \beta s_y^4 s_x^2 K_x^S K_y^S - 24 s_x^4 \beta n^2 \nu s_y^2 K_x^S K_y^S \right) / \left( \pi^2 K_x^S K_y^S \left[ 3 s_x^4 n^4 \right. \right. \\ & \left. \left. + 3 m^4 s_y^4 + 8 m^2 \nu n^2 s_y^2 s_x^2 - 2 m^2 n^2 s_y^2 s_x^2 \right] \right) \end{aligned} \quad (D.6b)$$



et,

$$\begin{aligned}
 \zeta_3 = & -\frac{4}{3} \left( 48 s_x^4 f^S n^2 s_y K_x^S + 48 m^2 f^S s_y^4 s_x K_y^S - 3 \pi^2 s_x^4 \tilde{W}^2 q^2 n^2 K_x^S K_y^S \right. \\
 & + 2 m^4 \pi^2 t_p^2 \omega_M s_y^4 K_x^S K_y^S - 3 m^2 \pi^2 p^2 \tilde{W}^2 s_y^4 K_x^S K_y^S + 2 \pi^2 t_p^2 s_x^4 \omega_M n^4 K_x^S K_y^S \\
 & + 48 m^2 \nu f^S s_y^3 s_x^2 K_x^S + 48 \nu f^S n^2 s_y^2 s_x^3 K_y^S + 2 m^4 \pi^2 t_p^2 s_y^4 K_x^S K_y^S \\
 & + 2 \pi^2 t_p^2 s_x^4 n^4 K_x^S K_y^S - 2 \pi^2 t_p^2 s_x^4 \nu \omega_M n^4 K_x^S K_y^S - 3 \pi^2 p^2 \nu \tilde{W}^2 n^2 s_y^2 s_x^2 K_x^S K_y^S \\
 & - 2 m^4 \pi^2 t_p^2 \nu \omega_M s_y^4 K_x^S K_y^S + 4 m^2 \pi^2 t_p^2 \omega_M n^2 s_y^2 s_x^2 K_x^S K_y^S \\
 & + 4 m^2 \pi^2 t_p^2 n^2 s_y^2 s_x^2 K_x^S K_y^S - 4 m^2 \pi^2 t_p^2 \nu \omega_M n^2 s_y^2 s_x^2 K_x^S K_y^S \\
 & \left. - 3 m^2 \pi^2 \nu \tilde{W}^2 q^2 s_y^2 s_x^2 K_x^S K_y^S \right) / \\
 & \left( \pi^2 K_x^S K_y^S \left[ 3 s_x^4 n^4 + 3 m^4 s_y^4 + 8 m^2 \nu n^2 s_y^2 s_x^2 - 2 m^2 n^2 s_y^2 s_x^2 \right] \right) \quad (D.6c)
 \end{aligned}$$

### 1.1.3 Température seuils

#### Température critique :

$$W_{pf}(\Delta T_{\text{crit}}) = 0 \longrightarrow \Delta T_{\text{crit}} = -\zeta_3 / \zeta_2$$

$$\Delta T_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 t_p^2 k_{\text{crit}}}{24 \beta s_y^2}$$

#### Coefficient de criticité :

$$\begin{aligned}
 k_{\text{crit}} = & \left( 48 s_x^4 f^S n^2 s_y K_x^S + 48 m^2 f^S s_y^4 s_x K_y^S - 3 \pi^2 s_x^4 \tilde{W}^2 q^2 n^2 K_x^S K_y^S \right. \\
 & + 2 m^4 \pi^2 t_p^2 \omega_M s_y^4 K_x^S K_y^S - 3 m^2 \pi^2 p^2 \tilde{W}^2 s_y^4 K_x^S K_y^S + 2 \pi^2 t_p^2 s_x^4 \omega_M n^4 K_x^S K_y^S \\
 & + 48 m^2 \nu f^S s_y^3 s_x^2 K_x^S + 48 \nu f^S n^2 s_y^2 s_x^3 K_y^S + 2 m^4 \pi^2 t_p^2 s_y^4 K_x^S K_y^S \\
 & + 2 \pi^2 t_p^2 s_x^4 n^4 K_x^S K_y^S - 2 \pi^2 t_p^2 s_x^4 \nu \omega_M n^4 K_x^S K_y^S - 3 \pi^2 p^2 \nu \tilde{W}^2 n^2 s_y^2 s_x^2 K_x^S K_y^S \\
 & - 2 m^4 \pi^2 t_p^2 \nu \omega_M s_y^4 K_x^S K_y^S + 4 m^2 \pi^2 t_p^2 \omega_M n^2 s_y^2 s_x^2 K_x^S K_y^S + 4 m^2 \pi^2 t_p^2 n^2 s_y^2 s_x^2 K_x^S K_y^S \\
 & \left. - 4 m^2 \pi^2 t_p^2 \nu \omega_M n^2 s_y^2 s_x^2 K_x^S K_y^S - 3 m^2 \pi^2 \nu \tilde{W}^2 q^2 s_y^2 s_x^2 K_x^S K_y^S \right) / \\
 & \left( s_x^2 K_x^S K_y^S \left( m^2 \nu s_y^2 + n^2 s_x^2 + m^2 s_y^2 + \nu n^2 s_x^2 \right) \pi^2 h^2 \right) \quad (D.7)
 \end{aligned}$$

#### Température de plastification locale :

$$\Delta T_y^{\text{lo}} = \frac{1}{\beta \varphi} \sqrt{\frac{\pi^2 k_{\text{crit}}}{24} \frac{\sigma_y}{E}} \left( 1 - \frac{0.25}{\varphi} \sqrt{\frac{\pi^2 k_{\text{crit}}}{24} \frac{E}{\sigma_y}} \right)$$

#### Température de plastification globale :

$$\Delta T_y^{\text{gl}} = \frac{(1 - \nu) \sigma_y}{E \beta}$$

### 1.1.4 Solution de raccord

Dans le cas où les températures de plastification (locale ou globale) sont inférieures à la température critique, il est nécessaire d'introduire une solution  $W_{rf}$  de la déformée en fonction de la température telle que le passage de la solution raccordée à la solution post-critique soit continue.

Deux types de raccords sont envisagés : linéaire et quadratique.

**Solution raccordée linéaire :** La solution de raccord linéaire consiste, pour assurer la continuité, à rechercher la tangente à la courbe  $W_{pf}$  sous condition  $W_{rf}(T_y) = W_{af}(T_y)$  où  $T_y = \min(T_y^{lo}, T_y^{gl})$ . Il s'agit alors de chercher la température  $T_{rf}$  où s'effectue le raccord.

— Expression de la tangente :

$$\begin{aligned} W_{rf}(T) &= \frac{dW_{pf}}{dT} \Big|_{T=T_{rf}} (T - T_{rf}) + W_{pf}(T_{rf}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\zeta_2 (T - T_{rf})}{\sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3}} + \sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3} \end{aligned}$$

— Condition de raccord :

$$\begin{aligned} W_{rf}(T_y) - W_{af}(T_y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{\zeta_2 (\Delta T_y - \Delta T_{rf})}{\sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3}} + \sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3} - \zeta_1 \Delta T_y &= 0 \\ \Rightarrow \Delta T_{rf} &= \frac{-2\zeta_3 - \zeta_2 \Delta T_y + 2\zeta_1 \Delta T_y \left( \zeta_1 \Delta T_y + \sqrt{\zeta_1^2 (\Delta T_y)^2 - \zeta_2 \Delta T_y - \zeta_3} \right)}{\zeta_2} \end{aligned}$$

**Solution raccordée quadratique :** La solution de raccord quadratique consiste à utiliser une fonction  $W_{rf}$  polynomiale de degré 2 pour effectuer le raccord entre les solutions manquantes. On prendra  $W_{rf} = \alpha_1 (\Delta T)^2 + \alpha_2 \Delta T + \alpha_3$  où  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont les inconnues du problème tel que  $\alpha_1 \neq 0$  (sans quoi le raccord est linéaire). La quatrième inconnue est la température de raccord  $T_{rf}$  entre  $W_{rf}$  et  $W_{pf}$  telle que  $T_{rf} \geq T_y$ .

Quatre conditions sont nécessaires à la résolution problème.

Ces dernières sont données par les conditions d'intersections en  $T_y$  et  $T_{rf}$  :

$$\begin{aligned} W_{af}(T_y) &= W_{rf}(T_y) \\ W_{rf}(T_{rf}) &= W_{pf}(T_{rf}) \end{aligned}$$

Et les conditions de continuité :

$$\begin{aligned} \frac{dW_{af}}{dT} \Big|_{T=T_y} &= \frac{dW_{rf}}{dT} \Big|_{T=T_y} \\ \frac{dW_{rf}}{dT} \Big|_{T=T_{rf}} &= \frac{dW_{pf}}{dT} \Big|_{T=T_{rf}} \end{aligned}$$

Il en découle le système d'équation à résoudre :

$$\zeta_1 \Delta T_y - \alpha_1 (\Delta T_y)^2 - \alpha_2 \Delta T_y - \alpha_3 = 0 \quad (\text{D.8a})$$

$$\zeta_1 - 2 \alpha_1 \Delta T_y - \alpha_2 = 0 \quad (\text{D.8b})$$

$$\sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3} - \alpha_1 (\Delta T_{rf})^2 - \alpha_2 \Delta T_{rf} - \alpha_3 = 0 \quad (\text{D.8c})$$

$$\frac{1}{2} \frac{\zeta_2}{\sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3}} - 2 \alpha_1 \Delta T_{rf} - \alpha_2 = 0 \quad (\text{D.8d})$$

Il est relativement aisé d'obtenir les expressions des coefficients  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  en fonction de  $T_{rf}$  :

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3} - \zeta \Delta T_{rf}}{(\Delta T_{rf})^2 - 2 \Delta T_{rf} \Delta T_y + (\Delta T_y)^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\zeta_1 ((\Delta T_{rf})^2 + (\Delta T_y)^2) - 2 \Delta T_y \sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3}}{(\Delta T_{rf})^2 - 2 \Delta T_{rf} \Delta T_y + (\Delta T_y)^2}$$

$$\alpha_3 = \frac{\sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3} - \zeta \Delta T_{rf}}{(\Delta T_{rf})^2 - 2 \Delta T_{rf} \Delta T_y + (\Delta T_y)^2} (\Delta T_y)^2$$

Substituer les expressions de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  dans la dernière équation (D.8d) du système permet d'obtenir l'expression de  $\Delta T_{rf}$ .

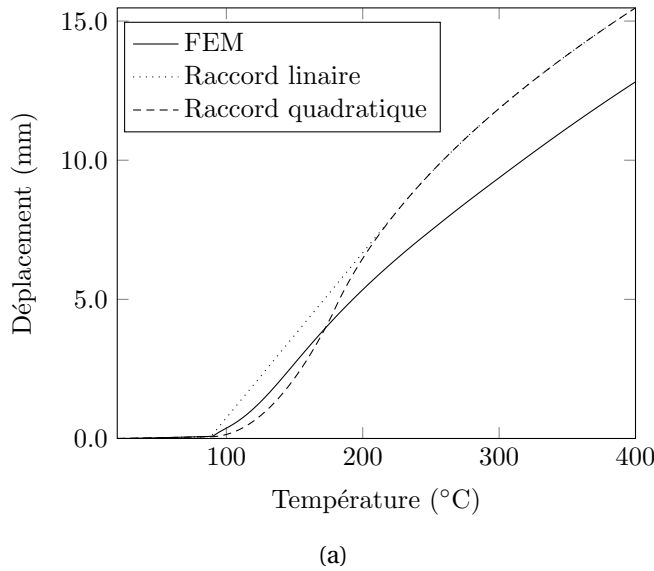
Soit  $W_{ar}$  la forme quadratique raccordant  $W_{af}$  et  $W_{pf}$  tel que  $\alpha_1$  non nul. Supposons que  $W_{af}(T_{rf}) > W_{pf}(T_{rf})$ . Alors, le phénomène de flambement est dominé par l'amplification du défaut en flexion. Le comportement en régime post-critique correspond donc au comportement pré-critique :  $W_{pf}(T) = W_{af}(T)$ . Il vient donc  $W_{rf} = W_{af}$  ce qui impose  $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$  et est absurde.

La condition  $W_{af}(T_{rf}) < W_{pf}(T_{rf})$  est donc nécessaire pour que  $W_{rf}$  existe. Alors  $\alpha_1 = \frac{\sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3} - \zeta \Delta T_{rf}}{(\Delta T_{rf})^2 - 2 \Delta T_{rf} \Delta T_y + (\Delta T_y)^2}$  s'écrit  $\frac{W_{pf}(T_{rf}) - W_{af}(T_{rf})}{(\Delta T_{rf})^2 - 2 \Delta T_{rf} \Delta T_y + (\Delta T_y)^2} > 0$ . Il vient donc les conditions  $\alpha_1 > 0$  et  $\alpha_3 > 0$ . La résolution de la dernière équation dans ces conditions donne :

$$\begin{aligned}
T_{rf} &= \frac{1}{\zeta_2} \left\{ -\zeta_3 + \left[ \frac{\left( \left( 27\zeta_2^2 + 3\sqrt{-\frac{192\alpha_1^3\zeta_3^3 - 288\alpha_1^2\zeta_3^2\zeta_2\alpha_2 + 144\alpha_1\zeta_3\zeta_2^2\alpha_2^2 - 24\zeta_2^3\alpha_2^3 - 81\zeta_2^4\alpha_1}{\alpha_1}} \right) \alpha_1^2 \right)^{1/3}}{6\alpha_1} \right] \right\} \\
&= \frac{2\alpha_1\zeta_1 - \zeta_2\alpha_2}{\left( \left( 27\zeta_2^2 + 3\sqrt{-\frac{192\alpha_1^3\zeta_3^3 - 288\alpha_1^2\zeta_3^2\zeta_2\alpha_2 + 144\alpha_1\zeta_3\zeta_2^2\alpha_2^2 - 24\zeta_2^3\alpha_2^3 - 81\zeta_2^4\alpha_1}{\alpha_1}} \right) \alpha_1^2 \right)^{1/3}} \right\}^2
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Le problème (D.10) peut être résolu, nous ne ferons pas figurer la solution explicite compte-tenu de sa lourdeur et invitons plutôt à utiliser une procédure itérative visant à minimiser l'erreur dans (D.8d) à partir d'un  $T_{rf}$  estimé. On pourra prendre en première approche  $T_{rf} = 1.2 T_{crit}$ .

**Confrontation des solutions de raccord linéaire - quadratique :** La solution linéaire est préférable pour sa simplicité de mise en œuvre par rapport à la solution quadratique. Par



**FIGURE D.2:** Confrontation des solutions raccordées avec la solution numérique ( $\varphi = 30$ )

ailleurs, la solution linéaire offre de meilleurs résultats pour des plaques dont l'élancement  $\varphi > 20$ . Pour de telles plaques, la solution de raccord quadratique tend à minimiser la solution numérique et n'est pas sécuritaire contrairement à la solution de raccord linéaire qui

reste enveloppe supérieure de la solution numérique comme l'illustre la figure D.2. Pour des plaques d'élancement  $\Phi \leq 20$ , la solution de raccord quadratique présente un meilleur comportement mais on sort alors des hypothèses des plaques minces [Wang *et al.*, 2001] et du champ d'application des présents travaux.

Effectuer un raccord quadratique entre la solution pré-critique  $W_{af}$  et post-critique  $W_{pf}$  pourrait être une solution pour tenir compte de la relaxation apparente (figure 3.4b) en présence de voilement élastique. Ce dernier point cité ne fera pas, dans nos études, l'objet de traitements particuliers.

## 1.2 Variantes

Dans la suite nous ne présenterons que les modifications dans les hypothèses ayant permis la résolution des cas **AAAA** : plaque simplement appuyée, **EEEE** : plaque encastree, **SC+meca** : conditions limites particulières SC avec chargement mécanique plan quelconque et **SC+anisothe** : conditions limites particulières SC avec chargement thermique anisothe dans le plan. La méthode de résolution pour chaque cas est expliquée au chapitre III et les développements sont analogues à ceux détaillés précédemment en 1.1.

### 1.2.1 Cas AAAA

Le cas de la plaque simplement appuyée sur ses quatre bords constitue une variante du cas SC isotrope (figure D.3). Les poids utilisés dans la méthode de Galerkin sont toujours de la forme  $\Psi : (x, y) \mapsto \sin\left(\frac{m \pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{s_y}\right)$ . La principale différence résulte des rotations qui sont considérées libres. Aucun moment de correction n'est alors introduit.

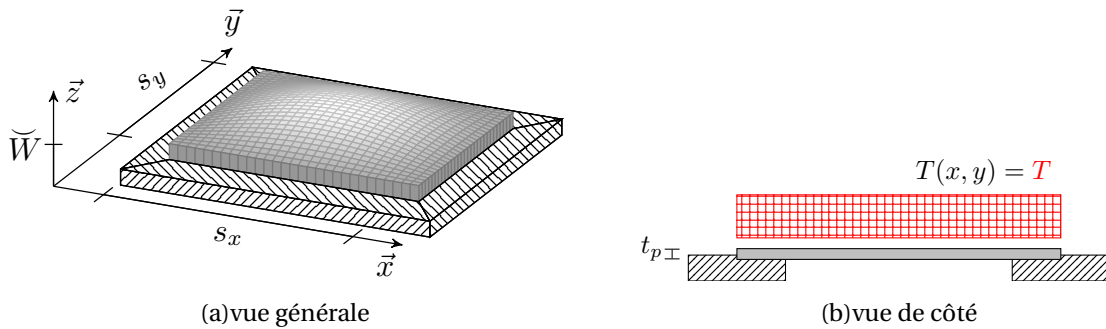


FIGURE D.3: Plaque AAAA (a) avec chargement isotherme (b)

### 1.2.2 Cas EEEE

Le traitement de la plaque encastree nécessite une modification des fonctions de formes  $\Psi$  afin que ces dernières remplissent les conditions limites imposées par (3.25). Pour ce faire, [Dumir, 1988] rappelle les formes des solutions (également utilisées par [Timoshenko et

Gere, 1961]) :  $\Psi : (x, y) \mapsto \frac{1}{4} \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{s_x}\right) \right) \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi y}{s_y}\right) \right)$ . La solution approchée imposant le bridage parfait des rotations, aucun moment de correction ne sera appliqué. En outre, la solution encastree imposant un bridage parfait des déplacements plans, il sera pris  $K_x^S \mapsto +\infty$  et  $K_y^S \mapsto +\infty$  au niveau des ressorts (figure D.4).

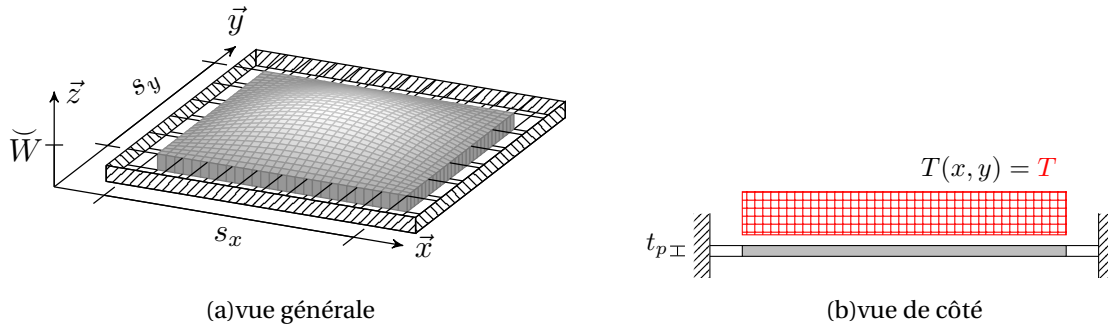


FIGURE D.4: Plaque EEEE (a) avec chargement isotherme (b)

### 1.2.3 Cas SC+chargement mécanique

L'introduction d'un chargement mécanique se fait par le biais de déformations planes imposées  $\varepsilon_{xx}^{imp}$  et  $\varepsilon_{yy}^{imp}$ . Ces déformations peuvent être positives (traction) ou négatives (compression). Le flambement ne sera pas susceptible de se produire en cas de chargement de traction.

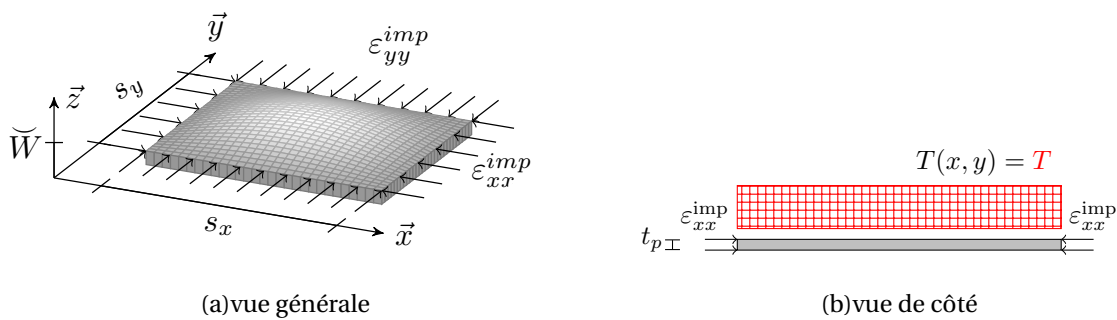


FIGURE D.5: Plaque SC+mécanique (a) avec chargement isotherme (b)

Les poids retenus pour Galerkin sont donc de la forme  $\Psi : (x, y) \mapsto \sin\left(\frac{m\pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{s_y}\right)$ .

### 1.2.4 Cas SC anisotherme

Pour ce cas, on se place dans le cas SC (figure D.6a) en condition anisotherme. Le chargement thermique n'est, dès lors, plus homogène à la surface de la plaque. En accord avec les résultats de la partie 1 du chapitre III, le moment thermique sera toujours supposé nul grâce aux bonnes propriétés conductives thermiques de l'acier. Pour des chargements de type flux

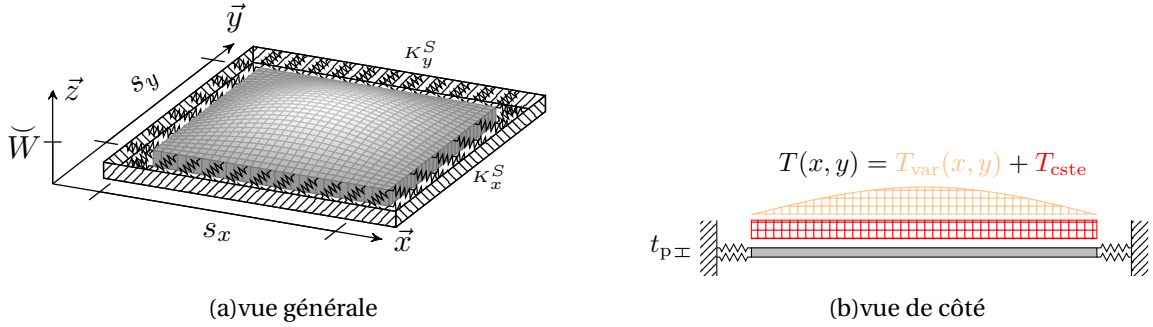


FIGURE D.6: Plaque SC (a) avec chargement anisotherme (b)

imposé, la température à la surface de la plaque chauffée est affectée par les transferts à l'interface plaque-béton. En régime post-critique, la présence d'une lame d'air induit une résistance thermique à l'interface. La meilleure isolation thermique de la plaque se traduit par une augmentation de la température dans la zone flambée.

Soit  $T$  la température mesurée au centre de la plaque. On décompose  $T$  en une part  $T_{cte}$  constante donnée par la température au bord et une part variable  $T_{var}$  telle que  $T_{var}(x = 0, y) = T_{var}(x = s_x, y) = T_{var}(x, y = s_y) = T_{var}(x, y = 0) = 0$  et  $T_{var}(s_x/2, s_y/2) + T_{cte} = T$  (figure D.6b).

Il convient alors de définir la solution approchée dans la base fonctionnelle du premier mode de flambement :  $\tilde{T}_{var} = T_{var} \sin\left(\frac{\pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{s_y}\right)$ . On introduit en outre la quantité  $\Lambda = \frac{T_{cte}}{T}$  que l'on nommera paramètre d'anisothermie à identifier. Plus  $\Lambda$  est faible, plus le problème est anisotherme. Au contraire  $\Lambda = 1$  ramène au problème isotherme.

Par définition,  $\Delta T = T - T_{ext}$ . Alors  $T_{cte} = (\Delta T + T_{ext})\Lambda$  et  $T_{var} = (\Delta T + T_{ext})(1 - \Lambda)$ . La déformation thermique  $\varepsilon^{th}$  peut enfin s'écrire (D.11) :

$$\varepsilon^{th} = \beta \Delta T = \beta \left( (\Delta T + T_{ext})(1 - \Lambda) \sin\left(\frac{\pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{s_y}\right) + (\Delta T + T_{ext})\Lambda - T_{ext} \right) \quad (D.11)$$

Les poids utilisés dans la méthode de Galerkin sont toujours de la forme  $\Psi : (x, y) \mapsto \sin\left(\frac{m \pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{s_y}\right)$ .

### 1.3 Synthèse des solutions

Ce paragraphe fait la synthèse des solutions pour les différentes variantes que nous avons présenté. Afin de réaliser les simplifications adéquates, les quantités sans dimension suivantes sont introduites :

$$\varphi = \frac{s_y}{t_p} \quad (\text{D.12a})$$

$$\gamma = \frac{s_x}{s_y} \quad (\text{D.12b})$$

$$\xi = \frac{\bar{W}}{t_p} \quad (\text{D.12c})$$

#### 1.3.1 Notations

On rappelle ici les notations des grandeurs utiles à la résolution du problème analytique de voilement local thermique.

— *Données géométriques :*

- $\gamma$  : rapport des dimensions planes, si  $s_y \geq s_x$  alors  $\gamma \leq 1$  est donnée par (D.12b)
- $\xi$  : défaut normalisé sur l'épaisseur, (D.12c)
- $\varphi$  : élancement de la plaque, si  $s_y \geq s_x$  alors  $\varphi$  est donnée par (D.12a)
- $m$  : nombre de demi-ondes longitudinales (mode de flambement, figure D.7)
- $n$  : nombre de demi-ondes transversales (mode de flambement, figure D.7)
- $p$  : nombre de demi-ondes longitudinales (mode du défaut)
- $q$  : nombre de demi-ondes transversales (mode du défaut)
- $s_x$  : espacement des connecteurs dans la direction de  $\vec{x}$   
(dimension dans la direction de  $\vec{x}$  de la maille élémentaire)
- $s_y$  : espacement des connecteurs dans la direction de  $\vec{y}$   
(dimension dans la direction de  $\vec{y}$  de la maille élémentaire)
- $t_p$  : épaisseur
- $\bar{W}$  : amplitude de l'imperfection initiale

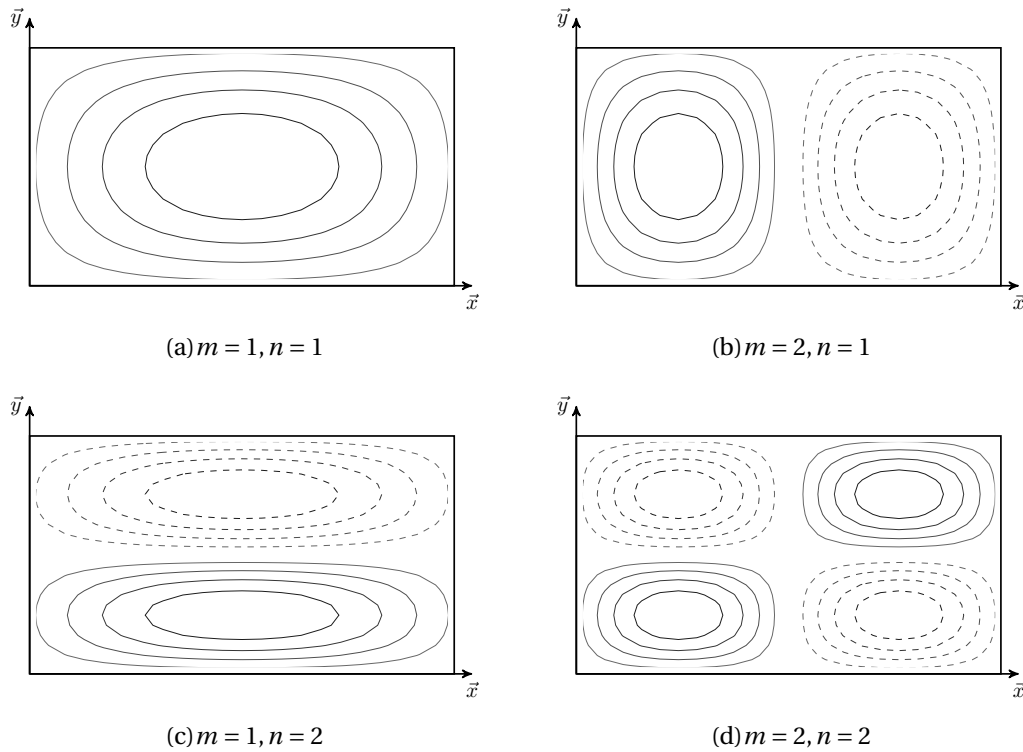
— *Chargements imposés :*

- $\Delta T$  : écart de température avec le milieu extérieur  $\Delta T = T - T_{\text{ext}}$
- $\varepsilon^{\text{imp}}$  : déformation mécanique imposée (traction si positive, compression si négative)
- $\Lambda$  : paramètre à identifier caractérisant l'inhomogénéité en température ( $\Lambda = T_{\text{cste}}/T$ )
- $\varpi_M$  : paramètre caractérisant la correction réalisée sur les rotations aux appuis  
dans le cas des éléments SC on pourra prendre  $\varpi_M = (\frac{\varphi}{58})^2$  (voir §1.4)
- $f^S$  : force de rappel des ressorts assurant le bridage de la dilatation thermique
- $K^S$  : raideur des ressorts assurant le bridage de la dilatation thermique
- $T$  : Température imposée au centre de l'élément
- $T_{\text{cste}}$  : Température imposée au bord de l'élément
- $T_{\text{ext}}$  : Température initiale (milieu extérieur)
- $u^S$  : déplacement autorisé des ressorts assurant le bridage de la dilatation thermique



— *Solutions analytiques :*

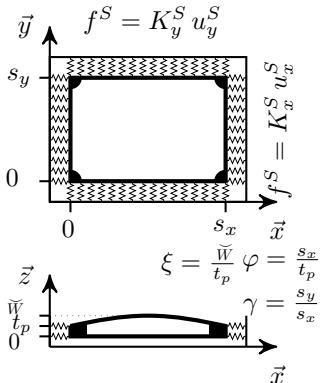
- $\zeta_1$  : coefficient partiel tel que  $W_{af} = \zeta_1 \Delta T$
- $\zeta_2$  : coefficient partiel tel que  $W_{pf} = \sqrt{\zeta_2 \Delta T + \zeta_3}$
- $\zeta_3$  : coefficient partiel tel que  $W_{pf} = \sqrt{\zeta_2 \Delta T + \zeta_3}$
- $\zeta_{3i}$  : coefficients partiels tels que  $\zeta_3 = \sum_i \zeta_{3i} X_i$   
où  $X_i$  est une grandeur précisée dans les tables D.1 à D.5
- $k_{\text{crit}}$  : coefficient critique de flambement
- $T_{\text{crit}}$  : température critique de flambement
- $T_y$  : température de plastification de la plaque  $T_y = \min(T_y^{\text{lo}}, T_y^{\text{gl}})$
- $T_y^{\text{gl}}$  : température de plastification globale de la plaque
- $T_y^{\text{lo}}$  : température de plastification locale de la plaque
- $T_{rf}$  : température où s'effectue le raccord des solutions  $W_{rf}$  et  $W_{pf}$
- $W_{af}$  : déplacement au centre en régime pré-critique
- $W_{rf}$  : déplacement au centre lors du raccord pré-critique - post-critique (si  $T_y < T_{\text{crit}}$ )
- $W_{pf}$  : déplacement au centre en régime post-critique



**FIGURE D.7:** Notion de demi-onde

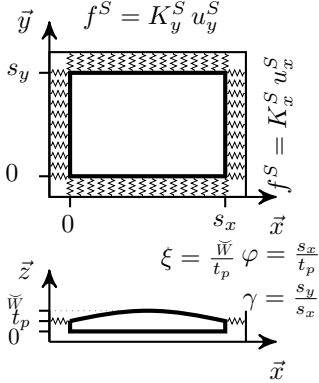
## 1.3.2 Cas SC

TABLE D.1: Solution analytique : élément SC isotherme

 <p>Diagram illustrating the geometry and coordinate systems for the SC element. The top part shows a cross-section in the <math>x-y</math> plane with dimensions <math>s_x</math> and <math>s_y</math>. The bottom part shows a cross-section in the <math>x-z</math> plane with dimensions <math>t_p</math> and <math>\gamma</math>. The coordinate systems are defined as <math>\xi = x/t_p</math> and <math>\eta = z/t_p</math>.</p>	<p><i>Equations générales :</i></p> $W_{af} = \zeta_1 \Delta T$ $W_{pf} = \sqrt{\zeta_2 \Delta T + \zeta_3} \quad   \quad \zeta_3 = \zeta_{31} \xi^2 + \zeta_{32} f^S + \zeta_{33}$ $W_{rf} = \frac{1}{2} \frac{\zeta_2 (T - T_{rf})}{\sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3}} + \sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3}$ $\Delta T_{rf} = \frac{-2\zeta_3 - \zeta_2 \Delta T_y + 2\zeta_1 \Delta T_y (\zeta_1 \Delta T_y + \sqrt{\zeta_1^2 (\Delta T_y)^2 - \zeta_2 \Delta T_y - \zeta_3})}{\zeta_2}$ $\Delta T_{crit} = -\frac{\zeta_3}{\zeta_2} \quad   \quad k_{crit} = \frac{32 \beta \Delta T_c \varphi^2}{\pi^2} \quad   \quad \Delta T_y^{gl} = \frac{(1-\nu) \sigma_y}{E \beta}$ $\Delta T_y^{lo} = \frac{1}{\beta \varphi} \sqrt{\frac{\pi^2 k_{crit}}{32} \frac{\sigma_y}{E}} \left( 1 - \frac{0.25}{\varphi} \sqrt{\frac{\pi^2 k_{crit}}{32} \frac{E}{\sigma_y}} \right)$ $\Delta T_y = \min(\Delta T_y^{gl}, \Delta T_y^{lo}) \quad   \quad \Delta T > \Delta T_y \Rightarrow W^{pl} = \frac{1}{1.2} W$
<p><i>Equations générales : <math>m, n, p, q, \varphi, \gamma, \xi, \omega_M, K_y^S, K_x^S</math></i></p> $\zeta_1 = \frac{-12(\nu+1)\gamma^2 t_p \varphi^2 \beta \xi}{(\gamma^2 \nu \omega_M n^2 - \gamma^2 n^2 - \gamma^2 \omega_M n^2 + m^2 \nu \omega_M - m^2 - m^2 \omega_M) \pi^2}$ $\zeta_2 = \frac{32 \gamma^2 \varphi^2 t_p^2 \beta (n^2 \gamma^2 + m^2 + \nu n^2 \gamma^2 + m^2 \nu)}{\pi^2 (3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 \nu n^2 \gamma^2)}$ $\zeta_{31} = \frac{4 t_p^2 (\gamma^4 q^2 n^2 + m^2 \nu q^2 \gamma^2 + m^2 p^2 + p^2 \nu n^2 \gamma^2)}{(3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 \nu n^2 \gamma^2)}$ $\zeta_{32} = \frac{-64 \varphi t_p \gamma (m^2 \nu \gamma K_x^S + m^2 K_y^S + \gamma^3 n^2 K_x^S + \nu n^2 \gamma^2 K_y^S)}{\pi^2 K_x^S K_y^S (3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 \nu n^2 \gamma^2)}$ $\zeta_{33} = \frac{8 t_p^2 (-m^4 + 2 m^2 \nu \omega_M n^2 \gamma^2 + \gamma^4 \nu \omega_M n^4 - m^4 \omega_M + m^4 \nu \omega_M - n^4 \gamma^4 - 2 m^2 \omega_M n^2 \gamma^2 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 - \gamma^4 \omega_M n^4)}{3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 \nu n^2 \gamma^2}$	
<p><i>Solution dégradée 1- flambement en mode 1 : <math>m = n = p = q = 1</math></i></p> $\zeta_1 = \frac{-12(\nu+1)\gamma^2 h \varphi^2 \beta \xi}{(\nu \omega_M \gamma^2 - \omega_M \gamma^2 - \gamma^2 + \nu \omega_M - \omega_M - 1) \pi^2} \quad \zeta_2 = \frac{32 \gamma^2 \varphi^2 t_p^2 \beta (\gamma^2 + \nu \gamma^2 + \nu + 1)}{\pi^2 (3 \gamma^4 + 3 - 2 \gamma^2 + 8 \nu \gamma^2)}$ $\zeta_{31} = \frac{4 t_p (\gamma^4 + \nu \gamma^2 + 1 + \nu \gamma^2)}{(3 \gamma^4 + 3 - 2 \gamma^2 + 8 \nu \gamma^2)} \quad \zeta_{32} = \frac{-64 \varphi t_p \gamma (\nu \gamma K_x^S + K_y^S + \gamma^3 K_x^S + \nu \gamma^2 K_y^S)}{\pi^2 K_x^S K_y^S (3 \gamma^4 + 3 - 2 \gamma^2 + 8 \nu \gamma^2)}$ $\zeta_{33} = \frac{8 t_p^2 (-1 + 2 \nu \omega_M \gamma^2 + \gamma^4 \nu \omega_M - \omega_M + \nu \omega_M - \gamma^4 - 2 \omega_M \gamma^2 - 2 \gamma^2 - \gamma^4 \omega_M)}{3 \gamma^4 + 3 - 2 \gamma^2 + 8 \nu \gamma^2}$	
<p><i>Solution dégradée 2 - Ingénierie (SC encastree, pas connecteur constant) :</i>  <math>m = n = p = q = 1, K_x^S = K_y^S \rightarrow \infty</math> et <math>\gamma = 1</math></p> $\zeta_1 = \frac{-6 \xi \beta \varphi^2 t_p (1+\nu)}{\pi^2 (\nu \omega_M - \omega_M - 1)} \quad \zeta_2 = \frac{16 \varphi^2 t_p^2 \beta (1+\nu)}{\pi^2 (1+2\nu)}$ $\zeta_{31} = \frac{2 t_p^2 (1+\nu)}{(1+2\nu)} \quad \zeta_{32} = 0 \quad \zeta_{33} = \frac{8 t_p^2 (\nu \omega_M - \omega_M - 1)}{3 (1+2\nu)}$	

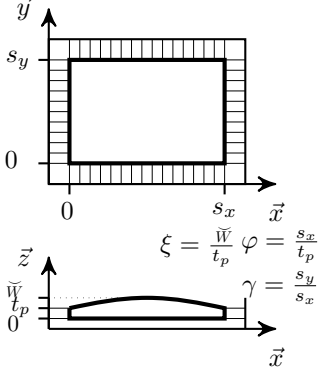
## 1.3.3 Cas AAAA

TABLE D.2: Solution analytique : plaque simplement appuyée isotherme

 <p>Diagram of a rectangular plate simply supported on all four edges (AAAA). The top edge is at <math>y=0</math>, bottom at <math>y=s_y</math>, left at <math>x=0</math>, and right at <math>x=s_x</math>. The plate is subjected to a uniform temperature load <math>f^S = K_y^S u_y^S</math>. The coordinate system <math>(x, y)</math> is shown at the top left, and <math>(x, z)</math> is shown at the bottom left. The plate thickness is <math>t_p</math>, and the coordinate <math>z</math> is measured from the bottom surface.</p>	<p><i>Equations générales :</i></p> $W_{af} = \zeta_1 \Delta T$ $W_{pf} = \sqrt{\zeta_2 \Delta T + \zeta_3} \quad   \quad \zeta_3 = \zeta_{31} \xi^2 + \zeta_{32} f^S + \zeta_{33}$ $W_{rf} = \frac{1}{2} \frac{\zeta_2 (T - T_{rf})}{\sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3}} + \sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3}$ $\Delta T_{rf} = \frac{-2\zeta_3 - \zeta_2 \Delta T_y + 2\zeta_1 \Delta T_y (\zeta_1 \Delta T_y + \sqrt{\zeta_1^2 (\Delta T_y)^2 - \zeta_2 \Delta T_y - \zeta_3})}{\zeta_2}$ $\Delta T_{crit} = -\frac{\zeta_3}{\zeta_2} \quad   \quad k_{crit} = \frac{32 \beta \Delta T_c \varphi^2}{\pi^2} \quad   \quad \Delta T_y^{gl} = \frac{(1-\nu) \sigma_y}{E \beta}$ $\Delta T_y^{lo} = \frac{1}{\beta \varphi} \sqrt{\frac{\pi^2 k_{crit} \sigma_y}{32} \frac{E}{\sigma_y}} \left( 1 - \frac{0.25}{\varphi} \sqrt{\frac{\pi^2 k_{crit} E}{32} \frac{E}{\sigma_y}} \right)$ $\Delta T_y = \min(\Delta T_y^{gl}, \Delta T_y^{lo}) \quad   \quad \Delta T > \Delta T_y \Rightarrow W^{pl} = \frac{1}{1.2} W$
<p><i>Equations générales : <math>m, n, p, q, \varphi, \gamma, \xi, K_y^S, K_x^S</math></i></p> $\zeta_1 = \frac{12(\nu+1)\gamma^2 t_p \varphi^2 \beta \xi}{(n^2 \gamma^2 + m^2) \pi^2}$ $\zeta_2 = \frac{32 \gamma^2 \varphi^2 t_p^2 \beta (n^2 \gamma^2 + m^2 + \nu n^2 \gamma^2 + m^2 \nu)}{\pi^2 (3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 \nu n^2 \gamma^2)}$ $\zeta_{31} = \frac{4 t_p^2 (\gamma^4 q^2 n^2 + m^2 \nu q^2 \gamma^2 + m^2 p^2 + p^2 \nu n^2 \gamma^2)}{(3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 \nu n^2 \gamma^2)}$ $\zeta_{32} = \frac{-64 \varphi t_p \gamma (m^2 \nu \gamma K_x^S + m^2 K_y^S + \gamma^3 n^2 K_x^S + \nu n^2 \gamma^2 K_y^S)}{\pi^2 K_x^S K_y^S (3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 \nu n^2 \gamma^2)}$ $\zeta_{33} = \frac{-8}{3} \frac{t_p^2 (m^4 + \gamma^4 n^4 + 2 n^2 m^2 \gamma^2)}{3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 \nu n^2 \gamma^2}$	
<p><i>Solution dégradée 1- flambement en mode 1 : <math>m = n = p = q = 1</math></i></p> $\zeta_1 = \frac{12(\nu+1)\gamma^2 h \varphi^2 \beta \xi}{(1+\gamma^2) \pi^2}$ $\zeta_2 = \frac{32 \gamma^2 \varphi^2 t_p^2 \beta (\gamma^2 + \nu \gamma^2 + \nu + 1)}{\pi^2 (3 \gamma^4 + 3 - 2 \gamma^2 + 8 \nu \gamma^2)}$ $\zeta_{31} = \frac{4 t_p (\gamma^4 + \nu \gamma^2 + 1 + \nu \gamma^2)}{(3 \gamma^4 + 3 - 2 \gamma^2 + 8 \nu \gamma^2)}$ $\zeta_{32} = \frac{-64 \varphi t_p \gamma (\nu \gamma K_x^S + K_y^S + \gamma^3 K_x^S + \nu \gamma^2 K_y^S)}{\pi^2 K_x^S K_y^S (3 \gamma^4 + 3 - 2 \gamma^2 + 8 \nu \gamma^2)}$ $\zeta_{33} = \frac{-8}{3} \frac{t_p^2 (\gamma^4 + 2 \gamma^2 + 1)}{3 \gamma^4 + 3 - 2 \gamma^2 + 8 \nu \gamma^2}$	
<p><i>Solution dégradée 2 - Ingénierie (SC encastrée, pas connecteur constant) :</i>  <math>m = n = p = q = 1, K_x^S = K_y^S \rightarrow \infty</math> et <math>\gamma = 1</math></p> $\zeta_1 = \frac{6 \xi \beta \varphi^2 t_p (1+\nu)}{\pi^2} \quad \zeta_2 = \frac{16 \varphi^2 t_p^2 \beta (1+\nu)}{\pi^2 (1+2\nu)}$ $\zeta_{31} = \frac{2 t_p^2 (1+\nu)}{(1+2\nu)} \quad \zeta_{32} = 0 \quad \zeta_{33} = \frac{-8}{3} \frac{t_p^2}{(1+2\nu)}$	

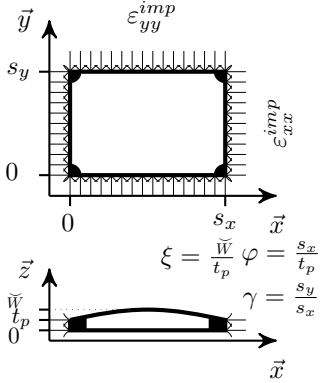
## 1.3.4 Cas EEEE

TABLE D.3: Solution analytique : plaque encastree isotherme

	<p><i>Equations générales :</i></p> $W_{af} = \zeta_1 \Delta T$ $W_{pf} = \sqrt{\zeta_2 \Delta T + \zeta_3} \quad   \quad \zeta_3 = \zeta_{31} \xi^2 + \zeta_{32} f^S + \zeta_{33}$ $W_{rf} = \frac{1}{2} \frac{\zeta_2 (T - T_{rf})}{\sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3}} + \sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3}$ $\Delta T_{rf} = \frac{-2\zeta_3 - \zeta_2 \Delta T_y + 2\zeta_1 \Delta T_y (\zeta_1 \Delta T_y + \sqrt{\zeta_1^2 (\Delta T_y)^2 - \zeta_2 \Delta T_y - \zeta_3})}{\zeta_2}$ $\Delta T_{crit} = -\frac{\zeta_3}{\zeta_2} \quad   \quad k_{crit} = \frac{32 \beta \Delta T_c \varphi^2}{\pi^2} \quad   \quad \Delta T_y^{gl} = \frac{(1-\nu) \sigma_y}{E \beta}$ $\Delta T_y^{lo} = \frac{1}{\beta \varphi} \sqrt{\frac{\pi^2 k_{crit} \sigma_y}{32} \frac{E}{\sigma_y}} \left( 1 - \frac{0.25}{\varphi} \sqrt{\frac{\pi^2 k_{crit} E}{32} \frac{\sigma_y}{E}} \right)$ $\Delta T_y = \min(\Delta T_y^{gl}, \Delta T_y^{lo}) \quad   \quad \Delta T > \Delta T_y \Rightarrow W^{pl} = \frac{1}{1.2} W$
<p><i>Solution dégradée 1- flambement en mode 1 : m = n = p = q = 1</i></p>	
$\zeta_1 = \frac{9 \xi \beta \varphi^2 t_p (\nu \gamma^2 + \nu + \gamma^2 + 1)}{\pi^2 (3 + 3 \gamma^4 + 2 \gamma^2)}$ $\zeta_{31} = t_p^2$	$\zeta_2 = \frac{384}{5} \frac{\gamma^2 \varphi^2 t_p^2 \beta (\gamma^2 + 1 + \nu + \gamma^2)}{\pi^2 (40 \nu \gamma^2 - 10 \gamma^2 + 7 + 7 \gamma^4)}$ $\zeta_{32} = 0$ $\zeta_{33} = -\frac{128}{15} \frac{t_p^2 (2 \gamma^2 + 3 + 3 \gamma^4)}{40 \nu \gamma^2 - 10 \gamma^2 + 7 + 7 \gamma^4}$
<p><i>Solution dégradée 2 - Ingénierie (SC encastree, pas connecteur constant) :</i>  <i>m = n = p = q = 1, K_x^S = K_y^S \rightarrow \infty et \gamma = 1</i></p>	
$\zeta_1 = \frac{9 \xi \beta \varphi^2 t_p (1 + \nu)}{4 \pi^2}$ $\zeta_{31} = t_p^2$	$\zeta_2 = \frac{192}{5} \frac{\varphi^2 t_p^2 \beta (1 + \nu)}{\pi^2 (1 + 10 \nu)}$ $\zeta_{32} = 0$ $\zeta_{33} = \frac{-256}{15} \frac{t_p^2}{(1 + 10 \nu)}$

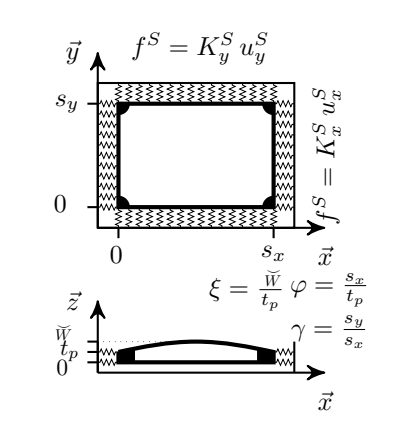
## 1.3.5 Cas SC + mécanique

TABLE D.4: Solution analytique : élément SC isotherme + chargement mécanique imposé

	<p><i>Équations générales :</i></p> $W_{af} = \zeta_1 \Delta T$ $W_{pf} = \sqrt{\zeta_2 \Delta T + \zeta_3} \mid \zeta_3 = \zeta_{31} \xi^2 + \zeta_{32} \varepsilon_{xx}^{\text{imp}} + \zeta_{33} \varepsilon_{yy}^{\text{imp}} + \zeta_{34}$ $W_{rf} = \frac{1}{2} \frac{\zeta_2 (T - T_{rf})}{\sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3}} + \sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3}$ $\Delta T_{rf} = \frac{-2\zeta_3 - \zeta_2 \Delta T_y + 2\zeta_1 \Delta T_y (\zeta_1 \Delta T_y + \sqrt{\zeta_1^2 (\Delta T_y)^2 - \zeta_2 \Delta T_y - \zeta_3})}{\zeta_2}$ $\Delta T_{\text{crit}} = -\frac{\zeta_3}{\zeta_2} \mid k_{\text{crit}} = \frac{32 \beta \Delta T_c \varphi^2}{\pi^2} \mid \Delta T_y^{\text{gl}} = \frac{(1-\nu) \sigma_y}{E \beta}$ $\Delta T_y^{\text{lo}} = \frac{1}{\beta \varphi} \sqrt{\frac{\pi^2 k_{\text{crit}}}{32} \frac{\sigma_y}{E}} \left( 1 - \frac{0.25}{\varphi} \sqrt{\frac{\pi^2 k_{\text{crit}}}{32} \frac{E}{\sigma_y}} \right)$ $\Delta T_y = \min(\Delta T_y^{\text{gl}}, \Delta T_y^{\text{lo}}) \mid \Delta T > \Delta T_y \Rightarrow W^{\text{pl}} = \frac{1}{1.2} W$
<p><i>Equations générales : <math>m, n, p, q, \varphi, \gamma, \xi, \omega_M, K_y^S, K_x^S</math></i></p> $\zeta_1 = \frac{-12(\nu+1)\gamma^2 t_p \varphi^2 \beta \xi}{(\gamma^2 \nu \omega_M n^2 - \gamma^2 n^2 - \gamma^2 \omega_M n^2 + m^2 \nu \omega_M - m^2 - m^2 \omega_M) \pi^2}$ $\zeta_2 = \frac{32 \gamma^2 \varphi^2 t_p^2 \beta (n^2 \gamma^2 + m^2 + \nu n^2 \gamma^2 + m^2 \nu)}{\pi^2 (3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 \nu n^2 \gamma^2)}$ $\zeta_{31} = \frac{4 t_p^2 (\gamma^4 q^2 n^2 + m^2 \nu q^2 \gamma^2 + m^2 p^2 + p^2 \nu n^2 \gamma^2)}{(3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 \nu n^2 \gamma^2)}$ $\zeta_{32} = \frac{-32 t_p^2 \varphi^2 \gamma^2 (\gamma^2 n^2 \nu + m^2)}{\pi^2 (3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 \nu n^2 \gamma^2)} \quad \zeta_{33} = \frac{-32 t_p^2 \varphi^2 \gamma^2 (\gamma^2 n^2 + m^2 \nu)}{\pi^2 (3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 \nu n^2 \gamma^2)}$ $\zeta_{34} = \frac{8}{3} \frac{t_p^2 (-m^4 + 2 m^2 \nu \omega_M n^2 \gamma^2 + \gamma^4 \nu \omega_M n^4 - m^4 \omega_M + m^4 \nu \omega_M - n^4 \gamma^4 - 2 m^2 \omega_M n^2 \gamma^2 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 - \gamma^4 \omega_M n^4)}{3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 \nu n^2 \gamma^2}$	
<p><i>Solution dégradée 1- flambement en mode 1 : <math>m = n = p = q = 1</math></i></p> $\zeta_1 = \frac{-12(\nu+1)\gamma^2 h \varphi^2 \beta \xi}{(\nu \omega_M \gamma^2 - \omega_M \gamma^2 - \gamma^2 + \nu \omega_M - \omega_M - 1) \pi^2} \quad \zeta_2 = \frac{32 \gamma^2 \varphi^2 t_p^2 \beta (\gamma^2 + \nu \gamma^2 + \nu + 1)}{\pi^2 (3 \gamma^4 + 3 - 2 \gamma^2 + 8 \nu \gamma^2)}$ $\zeta_{31} = \frac{4 t_p^2 (\gamma^4 + \nu \gamma^2 + 1 + \nu \gamma^2)}{(3 \gamma^4 + 3 - 2 \gamma^2 + 8 \nu \gamma^2)} \quad \zeta_{32} = \frac{-32 h^2 \varphi^2 \gamma^2 (\gamma^2 \nu + 1)}{(-2 \gamma^2 + 8 \gamma^2 \nu + 3 + 3 \gamma^4) \pi^2} \quad \zeta_{33} = \frac{-32 h^2 \varphi^2 \gamma^2 (\gamma^2 + \nu)}{(-2 \gamma^2 + 8 \gamma^2 \nu + 3 + 3 \gamma^4) \pi^2}$ $\zeta_{34} = \frac{8}{3} \frac{t_p^2 (-1 + 2 \nu \omega_M \gamma^2 + \gamma^4 \nu \omega_M - \omega_M + \nu \omega_M - \gamma^4 - 2 \omega_M \gamma^2 - 2 \gamma^2 - \gamma^4 \omega_M)}{3 \gamma^4 + 3 - 2 \gamma^2 + 8 \nu \gamma^2}$	
<p><i>Solution dégradée 2 - Ingénierie (SC encastrée, pas connecteur constant) : <math>m = n = p = q = 1</math> et <math>\gamma = 1</math></i></p> $\zeta_1 = \frac{-6 \xi \beta \varphi^2 t_p (1 + \nu)}{\pi^2 (\nu \omega_M - \omega_M - 1)} \quad \zeta_2 = \frac{16 \varphi^2 t_p^2 \beta (1 + \nu)}{\pi^2 (1 + 2 \nu)}$ $\zeta_{31} = \frac{2 t_p^2 (1 + \nu)}{(1 + 2 \nu)} \quad \zeta_{32} = \zeta_{33} = \frac{-8 t_p^2 \varphi^2 (1 + \nu)}{\pi^2 (1 + 2 \nu)} \quad \zeta_{34} = \frac{8}{3} \frac{t_p^2 (\nu \omega_M - \omega_M - 1)}{(1 + 2 \nu)}$	

## 1.3.6 Cas SC anisotherme

TABLE D.5: Solution analytique : élément SC anisotherme

	<p><i>Equations générales :</i></p> $W_{af} = \zeta_1 \Delta T$ $W_{pf} = \sqrt{\zeta_2 \Delta T + \zeta_3} \mid \zeta_3 = \zeta_{31} \xi^2 + \zeta_{32} f^S + \zeta_{33} T_{\text{ext}} + \zeta_{34}$ $W_{rf} = \frac{1}{2} \frac{\zeta_2 (T - T_{rf})}{\sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3}} + \sqrt{\zeta_2 \Delta T_{rf} + \zeta_3}$ $\Delta T_{rf} = \frac{-2\zeta_3 - \zeta_2 \Delta T_y + 2\zeta_1 \Delta T_y (\zeta_1 \Delta T_y + \sqrt{\zeta_1^2 (\Delta T_y)^2 - \zeta_2 \Delta T_y - \zeta_3})}{\zeta_2}$ $\Delta T_{\text{crit}} = -\frac{\zeta_3}{\zeta_2} \mid k_{\text{crit}} = \frac{32\beta \Delta T_c \varphi^2}{\pi^2} \mid \Delta T_y^{\text{gl}} = \frac{(1-\nu) \sigma_y}{E \beta}$ $\Delta T_y^{\text{lo}} = \frac{1}{\beta \varphi} \sqrt{\frac{\pi^2 k_{\text{crit}}}{32} \frac{\sigma_y}{E}} \left( 1 - \frac{0.25}{\varphi} \sqrt{\frac{\pi^2 k_{\text{crit}}}{32} \frac{E}{\sigma_y}} \right)$ $\Delta T_y = \min(\Delta T_y^{\text{gl}}, \Delta T_y^{\text{lo}}) \mid \Delta T > \Delta T_y \Rightarrow W^{\text{pl}} = \frac{1}{1.2} W$
<p><i>Equations générales : m, n, p, q, phi, gamma, xi, omega_M, K_y^S, K_x^S</i></p> $\zeta_1 = -(12(-64n^2m^2\Lambda\nu - 64n^2m^2\Lambda + 16n^2\pi^2m^2\nu\Lambda + 16n^2\pi^2m^2\Lambda - 4n^2\pi^2\Lambda + 64n^2m^2\nu - 4n^2\pi^2\nu\Lambda + 64m^2n^2 - 4\pi^2m^2\Lambda - 4\pi^2m^2\nu\Lambda + \pi^2\nu\Lambda + \pi^2\Lambda))\beta t_p \varphi^2 \gamma^2 \xi / ((4\gamma^2n^4 + 16n^4m^2\nu\omega_M\gamma^2 - 16m^2\gamma^2n^4 - 4\gamma^2n^4\nu\omega_M + 4\gamma^2n^4\omega_M - 16n^4m^2\omega_M\gamma^2 + 4n^2m^2\gamma^2 - \gamma^2n^2\omega_M + 4n^2m^2\omega_M\gamma^2 - \gamma^2n^2 - 4n^2m^2\nu\omega_M\gamma^2 + \gamma^2n^2\nu\omega_M + 16n^2m^4\nu\omega_M - 16n^2m^4 - 4n^2m^2\nu\omega_M + 4m^2n^2 - 16n^2m^4\omega_M + 4n^2m^2\omega_M - m^2 - 4m^4\nu\omega_M + 4m^4\omega_M - m^2\omega_M + m^2\nu\omega_M + 4m^4)\pi^4)$ $\zeta_2 = 32\gamma^2\varphi^2 t_p^2 \beta (16\gamma^2n^4\pi^2m^2\Lambda\nu + \gamma^2n^2\pi^2\Lambda\nu + 16\gamma^2n^4\pi^2m^2\Lambda - 4\gamma^2n^2\pi^2m^2\Lambda + 16n^2\pi^2m^4\nu\Lambda - 64\gamma^2n^4m^2\nu\Lambda - 64n^2m^4\Lambda - 64n^2m^4\Lambda\nu - 64\gamma^2n^4m^2\Lambda - 4n^2\pi^2m^2\Lambda\nu + \pi^2m^2\Lambda\nu + \pi^2m^2\Lambda - 4\pi^2m^4\Lambda - 4\gamma^2n^4\pi^2\Lambda\nu + \gamma^2n^2\pi^2\Lambda - 4\gamma^2n^2\pi^2m^2\Lambda\nu + 64\gamma^2n^4m^2 + 64n^2m^4 + 64n^2m^4\nu + 64\gamma^2n^4m^2\nu - 4n^2\pi^2m^2\Lambda + 16n^2\pi^2m^4\Lambda - 4\gamma^2n^4\pi^2\Lambda - 4\pi^2m^4\nu\Lambda) / (\pi^4(8\gamma^2n^4m^2 + 8n^2m^2\nu\gamma^2 - 32\gamma^2n^4m^2\nu - 32n^2m^4\nu\gamma^2 + 128n^4m^4\nu\gamma^2 - 2n^2m^2\gamma^2 + 8n^2m^4\gamma^2 - 32n^4m^4\gamma^2 - 12m^6 - 12\gamma^4n^6 + 3\gamma^4n^4 + 3m^4 - 12n^2m^4 + 48n^2m^6 - 12\gamma^4n^4m^2 + 48\gamma^4n^6m^2))$ $\zeta_{31} = t_p^2$ $\zeta_{32} = \frac{-64\varphi t_p \gamma (m^2\nu\gamma K_x^S + m^2K_y^S + \gamma^3n^2K_x^S + \nu n^2\gamma^2K_y^S)}{\pi^2 K_x^S K_y^S (3n^4\gamma^4 + 3m^4 - 2m^2n^2\gamma^2 + 8m^2\nu n^2\gamma^2)}$ $\zeta_{33} = 32\varphi^2 t_p^2 \beta \gamma^2 (-64n^2m^4\Lambda + \gamma^2n^2\pi^2\Lambda\nu + 16\gamma^2n^4\pi^2m^2\Lambda - 4\gamma^2n^2\pi^2m^2\Lambda + 16n^2\pi^2m^4\nu\Lambda - 64\gamma^2n^4m^2\nu\Lambda - 4n^2\pi^2m^2\Lambda\nu - 4\gamma^2n^4\pi^2\Lambda\nu - \pi^2m^2\nu + 4\pi^2m^4\nu - 16n^2\pi^2m^4 + 64n^2m^4\nu + 64\gamma^2n^4m^2 - 64\gamma^2n^4m^2\Lambda + \pi^2m^2\Lambda\nu + \gamma^2n^2\pi^2\Lambda + 64\gamma^2n^4m^2\nu + 16n^2\pi^2m^4\Lambda - 4\gamma^2n^4\pi^2\Lambda - 4\pi^2m^4\nu\Lambda + 4\pi^2n^2m^2 - 16n^2\pi^2m^4\nu + 4\pi^2m^4 - \pi^2m^2 + 64n^2m^4 + 4n^2\pi^2m^2\nu - \gamma^2n^2\pi^2 + 4\gamma^2n^4\pi^2 - 64n^2m^4\Lambda\nu + 16\gamma^2n^4\pi^2m^2\Lambda\nu - 4\gamma^2n^2\pi^2m^2\Lambda\nu + \pi^2m^2\Lambda - \gamma^2n^2\pi^2\nu - 16\gamma^2n^4\pi^2m^2 + 4\gamma^2n^2\pi^2m^2 + 4\gamma^2n^4\pi^2\nu - 16\gamma^2n^4\pi^2m^2\nu + 4\gamma^2n^2\pi^2m^2\nu - 4n^2\pi^2m^2\Lambda - 4\pi^2m^4\Lambda) / (\pi^4(8\gamma^2n^4m^2 + 8n^2m^2\nu\gamma^2 - 32\gamma^2n^4m^2\nu - 32n^2m^4\nu\gamma^2 + 128n^4m^4\nu\gamma^2 - 2n^2m^2\gamma^2 + 8n^2m^4\gamma^2 - 32n^4m^4\gamma^2 - 12m^6 - 12\gamma^4n^6 + 3\gamma^4n^4 + 3m^4 - 12n^2m^4 + 48n^2m^6 - 12\gamma^4n^4m^2 + 48\gamma^4n^6m^2))$ $\zeta_{34} = \frac{-8}{3} \frac{t_p^2 (m^4 + \gamma^4n^4 + 2n^2m^2\gamma^2)}{3n^4\gamma^4 + 3m^4 - 2m^2n^2\gamma^2 + 8m^2\nu n^2\gamma^2}$	

## Solution analytique : élément SC anisotherme (suite)

*Solution dégradée 1- flambement en mode 1 :  $m = n = p = q = 1$*

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{-4}{3} \frac{(9\pi^2 \nu \Lambda + 64 - 64\Lambda \nu - 64\Lambda + 9\pi^2 \Lambda + 64\nu)}{(-\omega_M \gamma^2 + \nu \omega_M \gamma^2 - \gamma^2 - \omega_M + \nu \omega_M - 1) \pi^4} \\ \zeta_2 &= \frac{32}{9} \frac{\gamma^2 \varphi^2 t_p^2 \beta (9\gamma^2 \pi^2 \Lambda \nu + 9\gamma^2 \pi^2 \Lambda + 9\pi^2 \nu \Lambda - 64\gamma^2 \nu \Lambda - 64\Lambda - 64\Lambda \nu - 64\gamma^2 \Lambda + 9\pi^2 \Lambda + 64\gamma^2 + 64 + 64\nu + 64\gamma^2 \nu)}{\pi^4 (-2\gamma^2 + 8\gamma^2 \nu + 3 + 3\gamma^4)} \\ \zeta_{31} &= t_p^2 \\ \zeta_{32} &= \frac{-64\varphi t_p \gamma (\nu \gamma K_x^S + K_y^S + \gamma^3 K_x^S + \nu \gamma^2 K_y^S)}{\pi^2 K_x^S K_y^S (3\gamma^4 + 3 - 2\gamma^2 + 8\nu \gamma^2)} \\ \zeta_{33} &= \frac{32}{9} \varphi^2 t_p^2 \beta \gamma^2 (-9\gamma^2 \pi^2 \nu - 64\Lambda - 9\pi^2 - 9\pi^2 \nu - 9\gamma^2 \pi^2 + 9\pi^2 \nu \Lambda + 9\gamma^2 \pi^2 \Lambda + 9\gamma^2 \pi^2 \Lambda \nu - 64\gamma^2 \nu \Lambda - 64\Lambda \nu - 64\gamma^2 \Lambda + 64\gamma^2 + 64\nu + 64\gamma^2 \nu + 64 + 9\pi^2 \Lambda) / (\pi^4 (-2\gamma^2 + 8\gamma^2 \nu + 3 + 3\gamma^4)) \\ \zeta_{34} &= \frac{8}{3} \frac{t_p^2 (-1 + 2\nu \omega_M \gamma^2 + \gamma^4 \nu \omega_M - \omega_M + \nu \omega_M - \gamma^4 - 2\omega_M \gamma^2 - 2\gamma^2 - \gamma^4 \omega_M)}{3\gamma^4 + 3 - 2\gamma^2 + 8\nu \gamma^2}\end{aligned}$$

*Solution dégradée 2 - Ingénierie (SC encastree, pas connecteur constant) :*

$m = n = p = q = 1, K_x^S = K_y^S \rightarrow \infty$  et  $\gamma = 1$

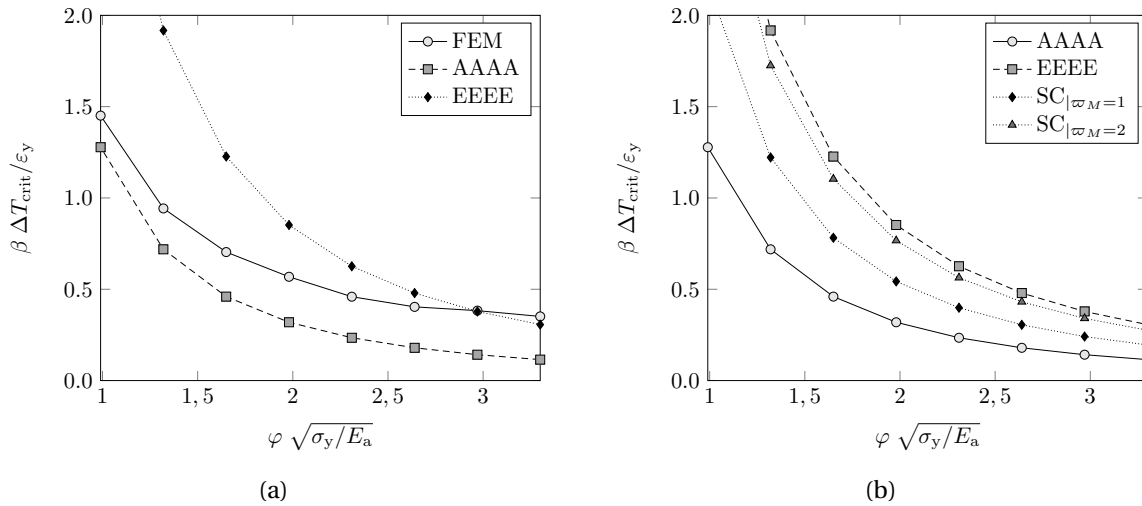
$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{-2}{3} \frac{\xi \varphi^2 t_p \beta (9\pi^2 \nu \Lambda + 9\pi^2 \Lambda - 64\Lambda \nu - 64\Lambda + 64\nu + 64)}{\pi^4 (\nu \omega_M - \omega_M - 1)} \\ \zeta_2 &= \frac{16}{9} \frac{\varphi^2 t_p^2 \beta (9\pi^2 \Lambda \nu + 9\pi^2 \Lambda - 64\Lambda - 64\Lambda \nu + 64 + 64\nu)}{\pi^4 (1 + 2\nu)} \\ \zeta_{31} &= t_p^2 \\ \zeta_{32} &= 0 \\ \zeta_{33} &= \frac{16}{9} \frac{t_p^2 \varphi^2 \beta (9\pi^2 \Lambda + 9\pi^2 \Lambda \nu - 9\pi^2 - 64\Lambda - 64\Lambda \nu + 64 + 64\nu - 9\pi^2 \nu)}{\pi^4 (1 + 2\nu)} \\ \zeta_{34} &= \frac{8}{3} \frac{t_p^2 (\nu \omega_M - \omega_M - 1)}{(1 + 2\nu)}\end{aligned}$$

## 1.4 Identification du moment de correction

On identifie ici le paramètre  $\omega_M$ .

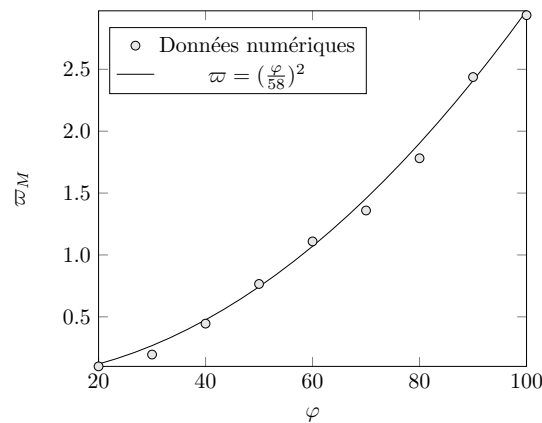
À partir des tables D.2 et D.3, on est en mesure d'exprimer la température critique analytiquement pour les solutions de la plaque simplement appuyée (AAAA) et de la plaque encastree (EEEE) sur ses quatre bords. La confrontation des domaines de voilement avec les résultats issus des simulations éléments finis (figure 3.6) montre que le domaine de flambement est borné par la solution minorante AAAA et la solution majorante EEEE. On notera que pour les plaques  $\varphi = 90$  et  $\varphi = 100$ ,  $T_{\text{crit}}^{\text{FEM}} > T_{\text{crit}}^{\text{EEEE}}$  (figure D.8a) ce qui est aberrant mais s'explique par la difficulté à relever la température de flambement exacte en présence d'instabilité élastique ainsi que par les faibles valeurs des températures. Les deux situations idéales enveloppes ne sont donc pas représentatives de la situation numérique. Dans ses

études du flambement mécanique des liners d'enceintes [Mézière, 2004], constate le même phénomène pour des études menées à échelle du voile. Ce comportement s'explique par les différences au niveau des conditions limites de chaque approche.



**FIGURE D.8:** Domaines de flambement des solutions analytiques : vs solution issue des éléments finis (a), vs solutions aux valeurs particulières de  $\varpi_M$  (b)

Dans le modèle AAAA, les rotations sont supposées parfaitement libres (figure 3.12a), contrairement au modèle EEEE dans lequel ces dernières sont totalement bridées (figure 3.12b). La présence de connecteurs et d'un remplissage en béton dans les modèles numériques sont à l'origine d'un bridage partiel des rotations (figure 3.12c). On se propose de tenir compte de ce bridage partiel en appliquant un moment de correction dans le calcul de la solution AAAA, correspondant à la part restreinte de la rotation.



**FIGURE D.9:** Identification de  $\varpi_M$  en fonction de l'élancement  $\varphi$



Ce moment est estimé à partir du moment somme 3.20 pondéré d'un coefficient  $\varpi_M$ . Lorsque  $\varpi_M = 0$ , on retrouve le domaine de voilement de la solution simplement appuyée. Lorsque  $\varpi_M$  augmente, le domaine évolue vers la solution encastree. Compte tenu de la relation (3.20), il est rassurant d'observer une bonne correspondance entre la solution AAAA corrigée et la solution EEEE pour  $\varpi_M = 2$  (figure D.8b). En effet, la correction apportée alors sous-entend un bridage complet de la plaque.

Le coefficient  $\varpi_M$  peut être obtenu par identification sur les résultats numériques en procédant par dichotomie. Compte tenu des valeurs observées sur la figure D.8a, les bornes initiales seront prises égales à 0 et 3. On aboutit à un jeu de valeurs de  $\varpi_M(\varphi)$  sur lesquelles on effectue une régression linéaire menant par la suite à l'expression (D.13)

$$\varpi_M : \varphi \mapsto \left(\frac{\varphi}{58}\right)^2 \quad (\text{D.13})$$

Le domaine de voilement de la solution analytique SC corrigée correspond ainsi aux résultats numériques et la table D.1 servira de référence dans le projet de normalisation du voilement thermique.

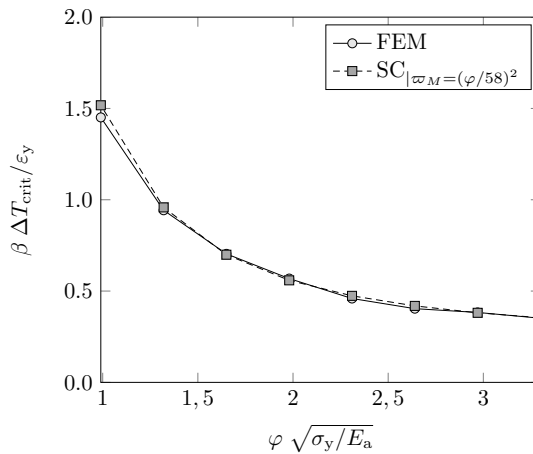


FIGURE D.10: Domaine de voilement solution corrigée SC (§1.3.2)

## 2 Méthode approchée : minimisation de l'énergie potentielle

Cette partie présente la méthode alternative de résolution de l'équation (3.24) de von Kármán-Föpplé par la méthode variationnelle.

### 2.1 Fondements de la méthode

La méthode d'approximation consiste à résoudre le problème d'approximation et à rechercher les coordonnées généralisées telles que définies par les relations (3.28a) à (3.28c).

Conformément à l'approche cinématique, la solution approchée du déplacement hors-plan  $w$  sera décomposée dans une base fonctionnelle de fonctions trigonométriques :  $\Psi : (x, y) \mapsto \sin\left(\frac{m \pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{s_y}\right)$ .

La détermination des expressions des déformations, efforts et moments agissant sur le système, est en tout point identique à la démarche détaillée au paragraphe 1.1 de la présente annexe et ne sera donc pas répétée ici.

La méthode de minimisation de l'énergie potentielle trouve ses fondements dans l'écriture du bilan énergétique du système élastique. La condition d'équilibre obtenue en différenciant ensuite l'énergie potentielle  $\Pi$  par rapport à la perturbation (voir chapitre II, §1.1.2) amène à un système d'équations dont les coordonnées généralisées sont solutions.

Suite au principe de conservation de l'énergie, l'énergie potentielle du système mécanique de la plaque voilée s'écrit comme la somme d'une énergie de déformation membranaire  $U_m$  et d'une énergie de déformation de flexion  $U_f$ .

$$\Pi = U_m + U_f \quad (D.14)$$

L'expression de l'énergie de flexion est obtenue en intégrant les moments internes par leur courbure respective :

$$U_f = -\frac{D}{2} \iint_{\mathcal{D}} M_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} dx dy. \quad (D.15)$$

En injectant dans (2.1) l'expression des moments (3.11c) avec  $M^{th} = 0$ , il vient :

$$U_f = \frac{D}{2} \iint_{\mathcal{D}} \left\{ \left[ (w - \tilde{w})_{,xx} + (w - \tilde{w})_{,yy} \right]^2 + 2(1 - \nu) \left[ (w - \tilde{w})_{,xy}^2 - (w - \tilde{w})_{,xx} (w - \tilde{w})_{,yy} \right] \right\} dx dy \quad (D.16)$$

[Wierzbicki, 2006a] fait remarquer que le terme  $(w - \tilde{w})_{,xy}^2 - (w - \tilde{w})_{,xx} (w - \tilde{w})_{,yy}$  est toujours nul pour une plaque aux bords droits. En effet, cette dernière expression peut également s'écrire  $-(\kappa_{xx} \kappa_{yy} - \kappa_{xy}^2)$  grâce à (3.7). On reconnaît ici l'expression de la courbure de Gauss  $\kappa_{xx} \kappa_{yy} - \kappa_{xy}^2 = \kappa_I \kappa_{II}$  (où  $\kappa_I$  et  $\kappa_{II}$  sont les courbures principales) nulle pour la géométrie considérée. L'équation (D.16) se simplifie alors en  $\frac{D}{2} \iint_{\mathcal{D}} \left[ (w - \tilde{w})_{,xx} + (w - \tilde{w})_{,yy} \right]^2 dx dy$ . Enfin, il faudra tenir compte du moment correctif qui, d'après la relation ajoute le terme  $-\frac{D}{2} \iint_{\mathcal{D}} M_{corr} (\kappa_{xx} + \kappa_{yy}) dx dy$  à  $U_f$ , qui s'écrit finalement dans notre cas :

$$U_f = \frac{D}{2} \iint_{\mathcal{D}} \left\{ \left[ (w - \tilde{w})_{,xx} + (w - \tilde{w})_{,yy} \right]^2 - M_{corr} (\kappa_{xx} + \kappa_{yy}) \right\} dx dy \quad (D.17)$$

Le second terme  $U_m$  est naturellement obtenu à partir du travail des efforts de membranes :

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} (N_{xx} \epsilon_{xx} + N_{yy} \epsilon_{yy} + N_{xy} \epsilon_{xy}) dx dy \quad (D.18)$$

## 2.2 Expression de la solution analytique

Réinjecter (D.17) et (D.18) dans (D.14) procure l'expression de  $\Pi$ . Le système dont l'inconnue  $W$  est solution est finalement obtenu en recherchant la condition d'équilibre de Trefftz :  $\frac{\partial \Pi}{\partial W} = 0$ .

La solution en régime post-flambement s'écrit finalement :

$$W_{pf} = \sqrt{\zeta_2 \Delta T + \zeta_3} \quad (\text{D.19a})$$

avec,

$$\zeta_2 = \frac{32 \gamma^2 \varphi^2 t_p^2 \beta (n^2 \gamma^2 + m^2 + \nu n^2 \gamma^2 + m^2 \nu)}{\pi^2 (9 m^4 + 9 n^4 \gamma^4 + 2 m^2 n^2 \gamma^2)} \quad (\text{D.19b})$$

$$\zeta_3 = \zeta_{31} \xi^2 + \zeta_{32} f^S + \zeta_{33} \quad (\text{D.19c})$$

et,

$$\zeta_{31} = \frac{4 t_p^2 (\gamma^4 q^2 n^2 + m^2 \nu q^2 \gamma^2 + m^2 p^2 + p^2 \nu n^2 \gamma^2)}{(9 m^4 + 9 n^4 \gamma^4 + 2 m^2 n^2 \gamma^2)} \quad (\text{D.19d})$$

$$\zeta_{32} = \frac{-64 \varphi t_p \gamma (m^2 \nu \gamma K_x^S + m^2 K_y^S + \gamma^3 n^2 K_x^S + \nu n^2 \gamma^2 K_y^S)}{\pi^2 K_x^S K_y^S (9 m^4 + 9 n^4 \gamma^4 + 2 m^2 n^2 \gamma^2)} \quad (\text{D.19e})$$

$$\zeta_{33} = \frac{8}{3} \frac{t_p^2 (-m^4 + 2 m^2 \nu \omega_M n^2 \gamma^2 + \gamma^4 \nu \omega_M n^4 - m^4 \omega_M + m^4 \nu \omega_M - n^4 \gamma^4 - 2 m^2 \omega_M n^2 \gamma^2 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 - \gamma^4 \omega_M n^4)}{9 m^4 + 9 n^4 \gamma^4 + 2 m^2 n^2 \gamma^2} \quad (\text{D.19f})$$

Dans le cas dégradé tel que  $m = n = p = q = 1$ ,  $K_x^S = K_y^S \rightarrow \infty$  et  $\gamma = 1$  les expressions (D.19b), (D.19d), (D.19e) et (D.19f) se simplifient en :  $\zeta_2 = \frac{16 \varphi^2 t_p^2 \beta (\nu + 1)}{5 \pi^2}$ ,  $\zeta_{31} = \frac{2}{5} t_p^2 (\nu + 1)$ ,  $\zeta_{32} = 0$  et  $\zeta_{33} = -\frac{8}{15} t_p^2 (\nu \omega - \omega + 1)$

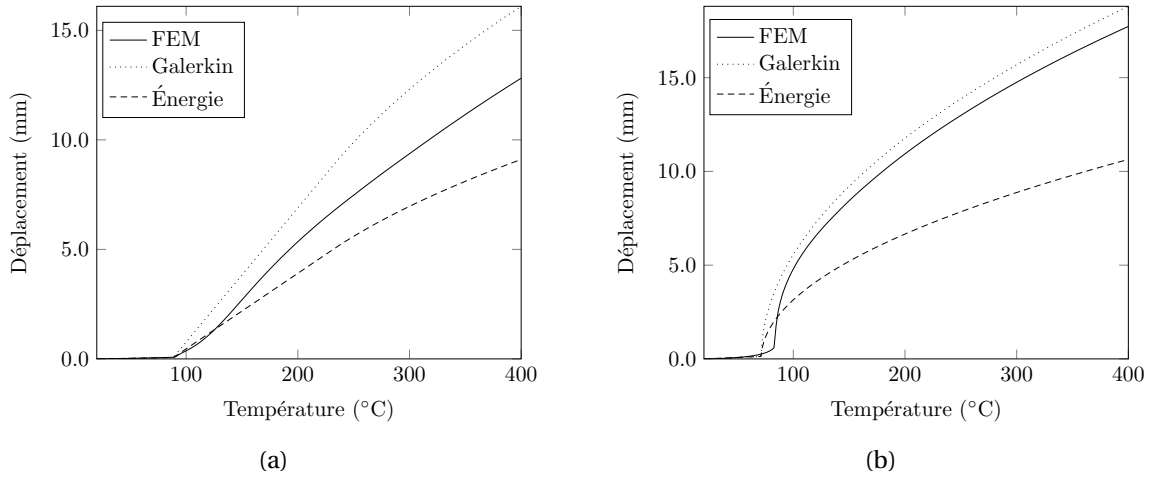
## 2.3 Confrontation avec les résultats issus de la méthode de Galerkin

Les expressions (D.19b), (D.19d), (D.19e) et (D.19f) dans leur forme générale présentent le même numérateur que leurs homologues présentées par la table D.1. Il en résulte des températures critiques de flambement  $\Delta T_{\text{crit}} = -\frac{\zeta_3}{\zeta_2}$  identiques dans les deux approches.

Seul le dénominateur change, valant  $(9 m^4 + 9 n^4 \gamma^4 + 2 m^2 n^2 \gamma^2)$  pour la méthode énergétique et  $(3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 \nu n^2 \gamma^2)$  pour celles de Galerkin.

Il est évident que  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ ,  $9 m^4 + 9 n^4 \gamma^4 + 2 m^2 n^2 \gamma^2 > 3 n^4 \gamma^4 + 3 m^4 - 2 m^2 n^2 \gamma^2 + 8 m^2 \nu n^2 \gamma^2$ . Il en résulte que la solution obtenue par la méthode énergétique sera toujours plus faible que la solution obtenue par la méthode de Galerkin.

Ce constat se retrouve dans la figure D.11 où sont tracés les résultats obtenues pour chacune des deux approches. On y remarque que l'approximation de Galerkin approche très correctement la réponse calculée par la méthode éléments finis, tandis que le résultat obtenu via l'approche énergétique est un minorant qui n'est pas satisfaisant, notamment pour des élancements importants  $\varphi \geq 50$  (figure D.11b).

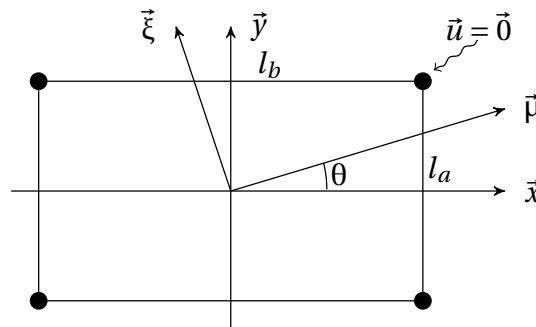


**FIGURE D.11:** Confrontation des approches FEM, Galerkin et énergétique,  $\varphi = 30$  (a) et  $\varphi = 60$  (b)

### 3 Critère de flambage pour un chargement quelconque

Nous présentons ici une proposition de méthode pour écrire la déformée au flambage d'une tôle plane rectangulaire dont les sommets sont à déplacements nuls, notamment en présence de cisaillement.

Soit le domaine défini par une plaque dont les déplacements sont nuls au niveau des connecteurs comme représenté par la figure D.12. On suppose la plaque soumise à l'état de



**FIGURE D.12:** Repère des contraintes principales

contrainte suivant dont les composantes sont données dans la base cartésienne  $(\vec{x}, \vec{y})$  par la matrice :

$$\underline{\underline{N}}^{(\vec{x}, \vec{y})} = \begin{bmatrix} N_{xx} & N_{xy} \\ N_{xy} & N_{yy} \end{bmatrix} \quad (\text{D.20})$$

Soit la base principale  $(\vec{\xi}, \vec{\mu})$  telle que :

$$\underline{\underline{N}} \xrightarrow{(\vec{\xi}, \vec{\mu})} \begin{bmatrix} N_{\xi} & 0 \\ 0 & N_{\mu} \end{bmatrix} \quad (\text{D.21})$$

On calcule  $N_{\xi}$ ,  $N_{\mu}$  et  $\theta$  en fonction de  $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$  et  $N_{xy}$

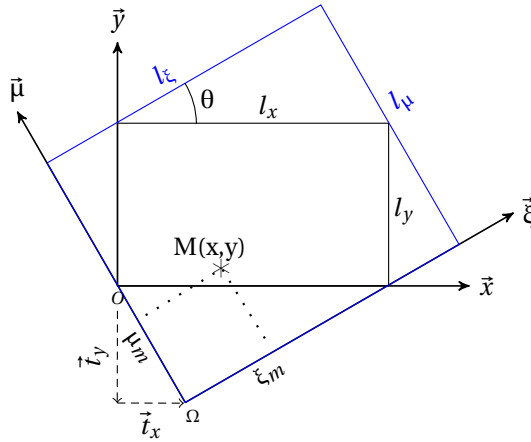
$$N_{\xi} = \frac{N_{xx} + N_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_{xx} - N_{yy}}{2}\right)^2 + N_{xy}^2} \quad (\text{D.22a})$$

$$N_{\mu} = \frac{N_{xx} + N_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{N_{xx} - N_{yy}}{2}\right)^2 + N_{xy}^2} \quad (\text{D.22b})$$

On en déduit  $\theta$  :

$$\tan 2\theta = \frac{2 N_{xy}}{N_{xx} - N_{yy}} \quad (\text{D.23})$$

La connaissance de  $\theta$  permet de construire le rectangle circonscrit à la plaque initiale. Ses côtés sont parallèles aux directions principales  $(\vec{\xi}, \vec{\mu})$  et passent par les sommets du rectangle initial. Par projection il vient :



**FIGURE D.13:** Plaque circonscrite à la maille élémentaire SC

$$L_{\xi} = l_x \cos \theta + l_y \sin \theta \quad (\text{D.24a})$$

$$L_{\mu} = l_y \cos \theta + l_x \sin \theta \quad (\text{D.24b})$$

Puis :

$$\|\vec{t}_x\| = l_x (\sin \theta)^2$$

$$\|\vec{t}_y\| = l_x \cos \theta \sin \theta$$

Le changement de repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \mapsto (\Omega, \xi, \mu, \vec{z})$  s'écrit :

$$\underline{X}' = \underline{\mathcal{R}}^{-1} \odot (\underline{X} - \underline{\mathcal{T}})$$

Où  $\mathcal{R}$  est la rotation d'angle  $\theta$  et  $(\mathcal{T})$  la translation de composante  $(-t_x, t_y)$  Il en résulte enfin les relations de passages :

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos \theta + y \sin \theta - t_x \cos \theta + t_y \sin \theta = x \cos \theta + y \sin \theta \\ \mu &= y \cos \theta - x \sin \theta + t_x \sin \theta + t_y \cos \theta = y \cos \theta - x \sin \theta + l_x \sin \theta\end{aligned}\quad (\text{D.25a})$$

et inversement,

$$\begin{aligned}x &= \xi \cos \theta - \mu \sin \theta + t_x = \xi \cos \theta - \mu \sin \theta + l_x (\sin \theta)^2 \\ y &= \xi \sin \theta + \mu \cos \theta - t_y = \xi \sin \theta + \mu \cos \theta - l_x \cos \theta \sin \theta\end{aligned}\quad (\text{D.25b})$$

Soit la déformée en flambage de la tôle circonscrite soumise à  $N_\xi$  et  $N_\mu$  et dont les déplacements sur les bords sont nuls. On pose  $\tilde{w} = W \Psi$  avec  $\Psi : (x, y) \mapsto \sin\left(\frac{m \pi x}{s_x}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{s_y}\right)$ .

La relation d'équilibre sur la plaque circonscrite est :

$$D \nabla^4 \Psi = N_\xi \Psi_{,\xi\xi} + N_\mu \Psi_{,\mu\mu} \quad (\text{D.26})$$

Qui conduit au critère de flambage qui doit être vérifié pour que  $\Psi$  soit solution de l'équation d'équilibre :

$$\left(\frac{m \pi}{l_\xi}\right)^2 N_\xi + \left(\frac{n \pi}{l_\mu}\right)^2 N_\mu = D \left[ \left(\frac{m \pi}{l_\xi}\right)^2 + \left(\frac{n \pi}{l_\mu}\right)^2 \right] \quad (\text{D.27})$$

Le critère de flambage peut ensuite être exprimé directement dans la base globale avec  $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$  et  $N_{xy}$ .

## Conclusion

Cette annexe propose des résultats complémentaires illustrant les développements du chapitre III de ce travail de thèse. Nous avons détaillé la méthode analytique pour le cas de la maille élémentaire d'élément SC. Il en résulte des expressions fastidieuses qui se simplifient considérablement en introduisant les quantités sans dimensions  $\gamma$ ,  $\varphi$  et  $\xi$  et en remarquant que la solution en régime pré-critique se met sous la forme  $\zeta \Delta T$  et celle en régime post-critique sous la forme  $\sqrt{\zeta_2 \Delta T + \zeta_3}$ .

Nous avons alors enrichi les résultats en proposant des solutions analytiques pour un ensemble de cas incluant la plaque simplement appuyée, la plaque encastree, l'introduction de chargements mécaniques ou d'un chargement thermique variable à la surface de plaque  $T(x, y)$ . Chacune de ces solutions fait l'objet d'une fiche de synthèse présentée par les tables D.1 à D.5. On y présentera trois niveaux de dégradation pour chaque cas traité. Le premier

niveau correspond à la solution non dégradée, pouvant faire l'objet d'une implémentation numérique. Le second niveau réduit le flambage à son premier mode. Il s'agit cependant du cas le plus courant. Le dernier niveau résulte en des solutions très simples correspondant au cas où la dilatation thermique est parfaitement bridée dans le plan et l'espacement des connecteurs identique dans les deux directions. Ce cas, correspond au schéma de dimensionnement classique des SC et le bridage parfait certifie une réponse conservative au sens de la sécurité.

Nous avons ensuite montré dans une seconde partie que la résolution par une méthode énergétique représentait une alternative à la méthode de Galerkin, conduisant à une borne inférieure de la solution cherchée. Nous justifions ici l'intérêt porté aux méthodes cinématiques.

Enfin, nous avons présenté une méthode aboutissant à un critère de flambage dans le cas du chargement quelconque pour des plaques similaires aux structures SC, telles que le déplacement s'annule aux sommets seulement.

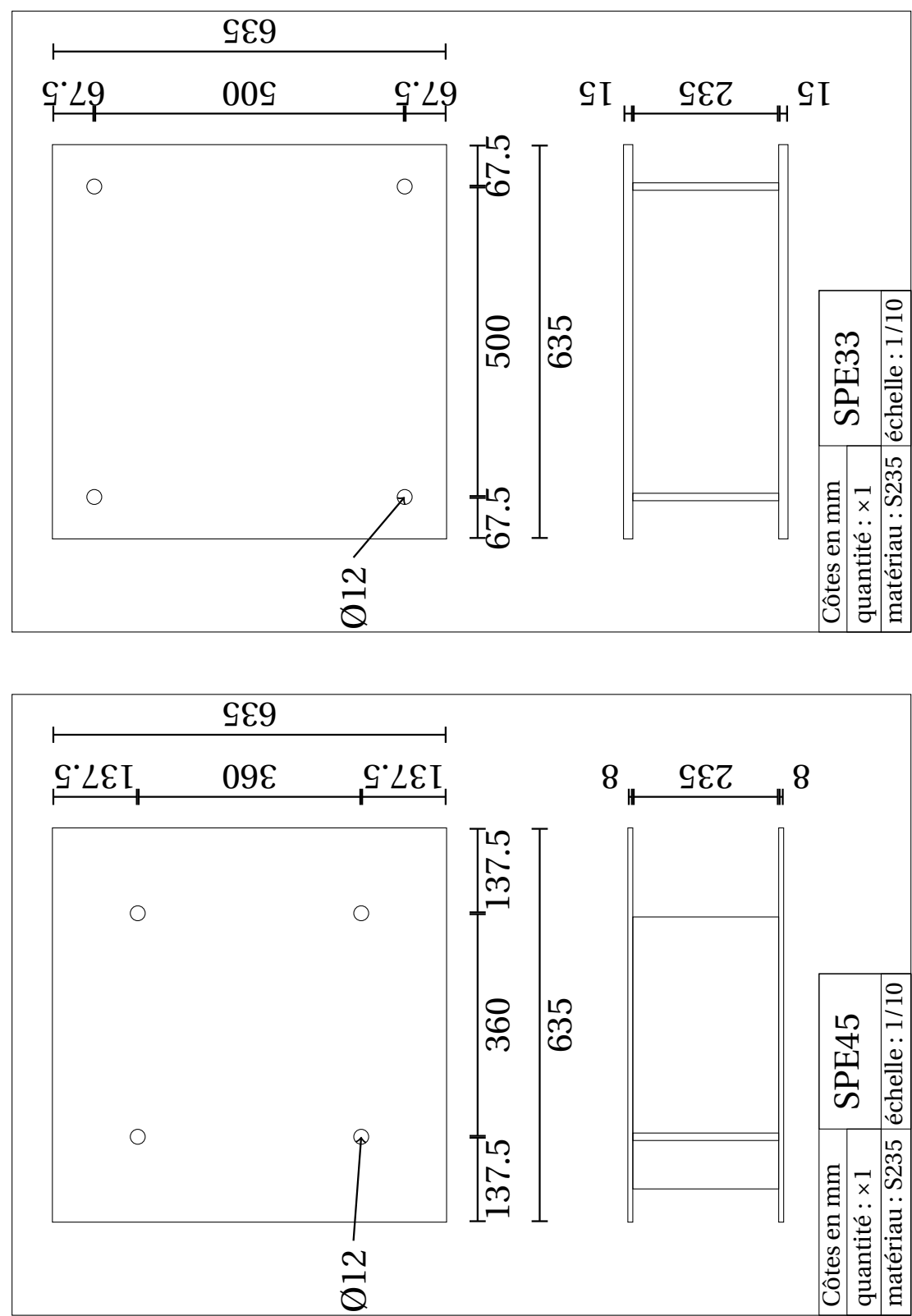
## **Annexe E**

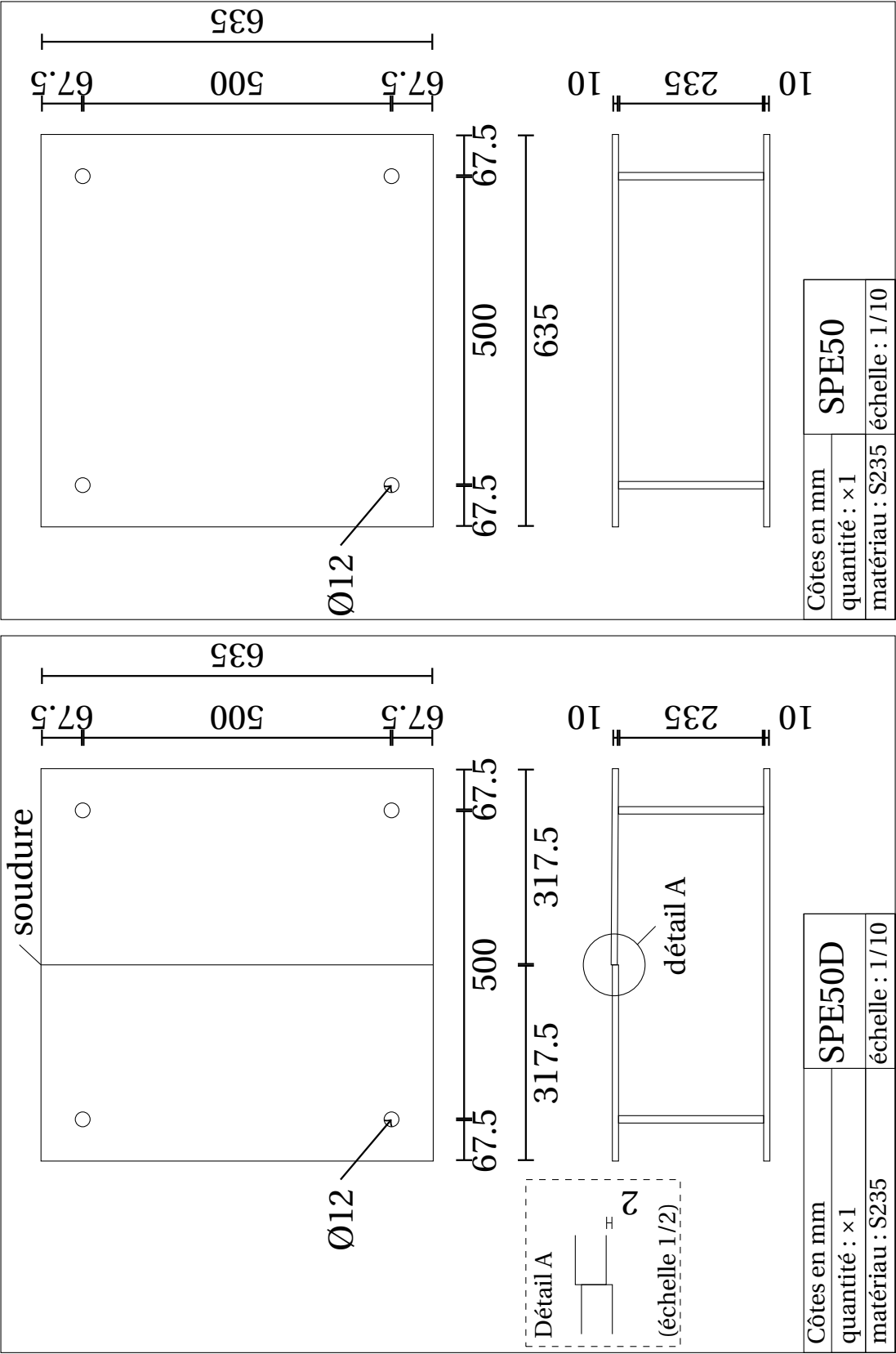
# **Plans utilisés lors de la campagne expérimentale**

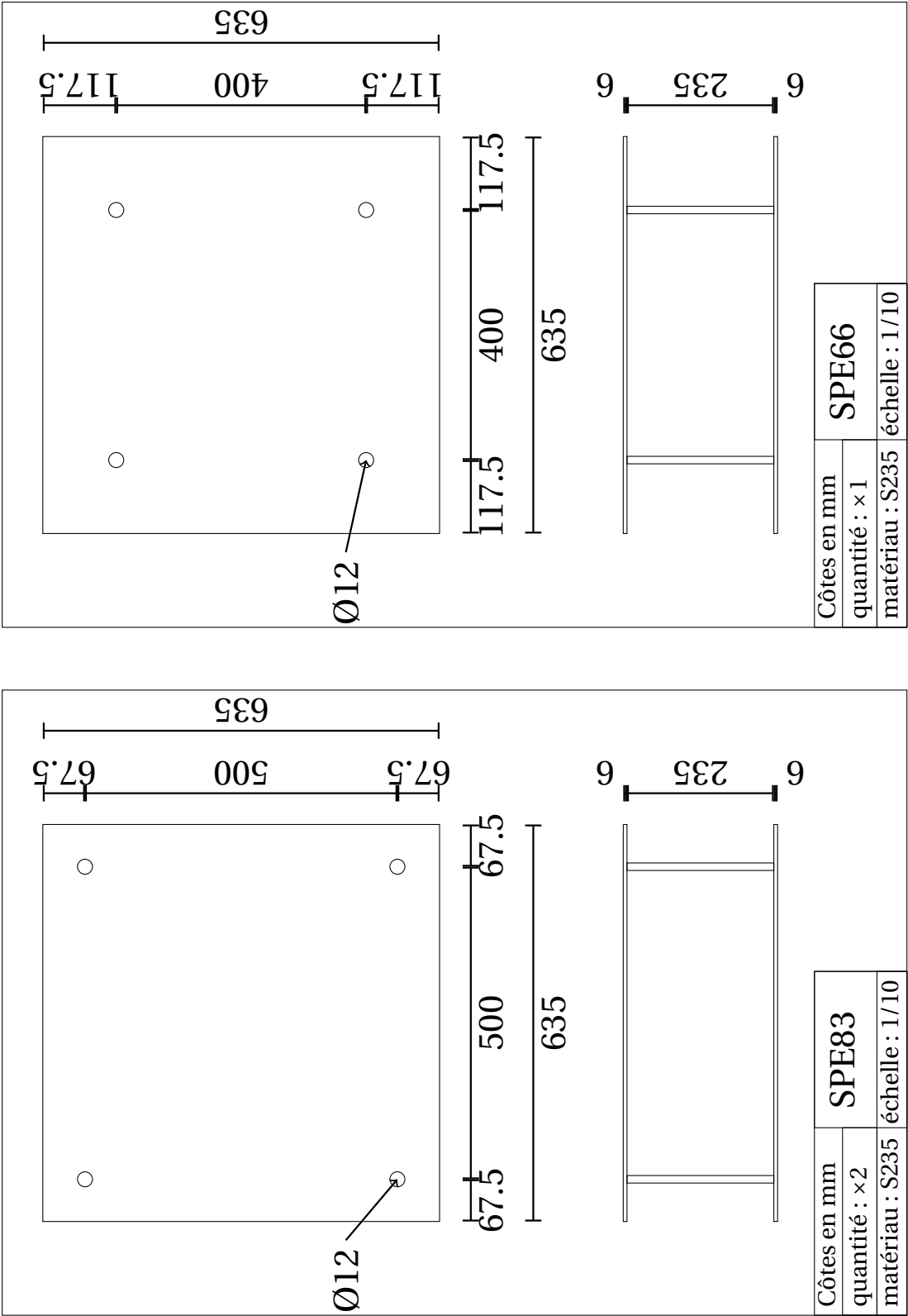
*Cette annexe présente les plans utilisés dans la campagne  
expérimentale menée au chapitre IV.*

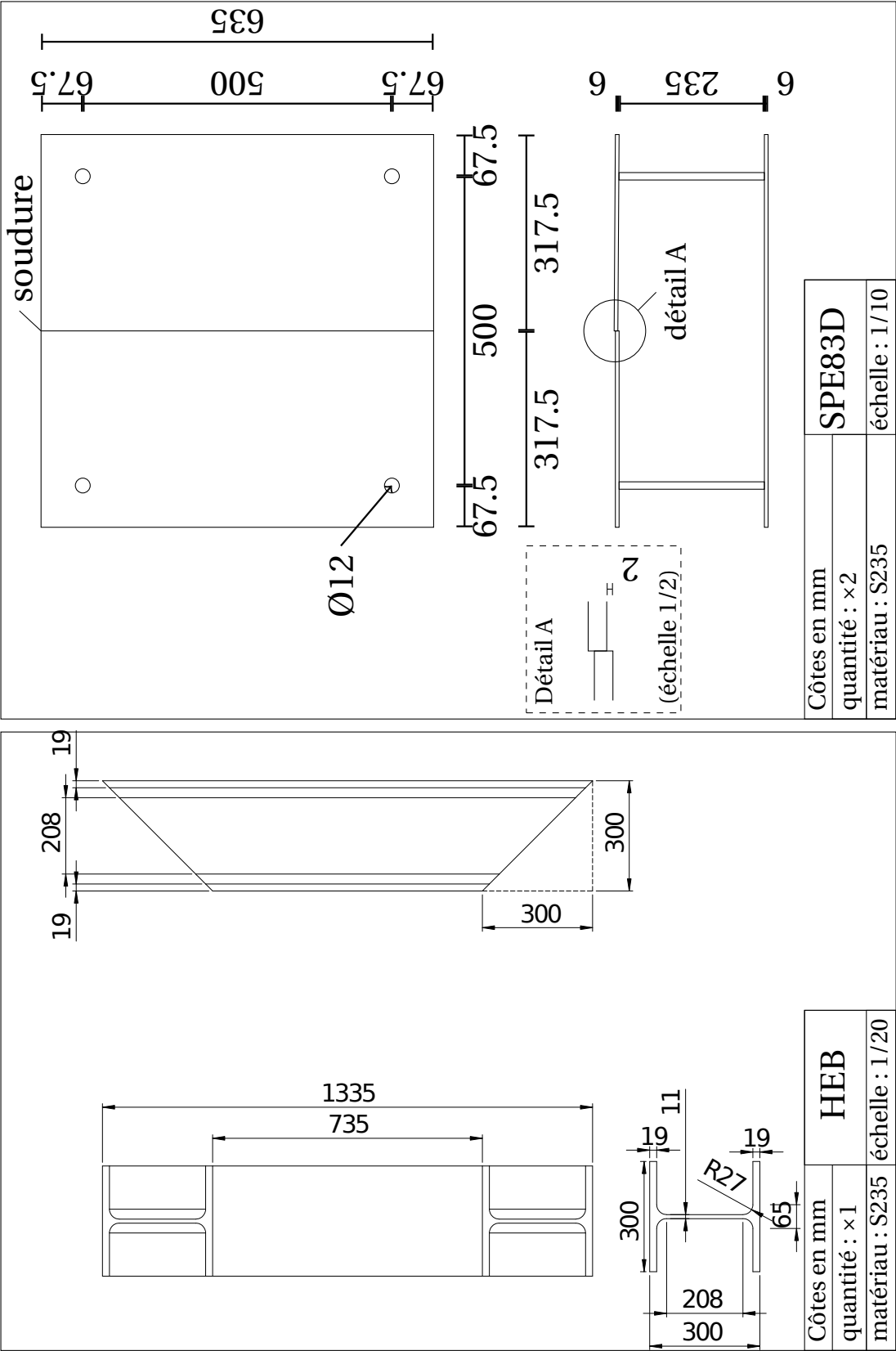
*Sont proposés les plans relatifs aux spécimens avec ou sans  
défaut, ainsi que les plans propres au HEB, au cadre inférieur et  
aux plats et isolants constitutifs du support expérimental.*



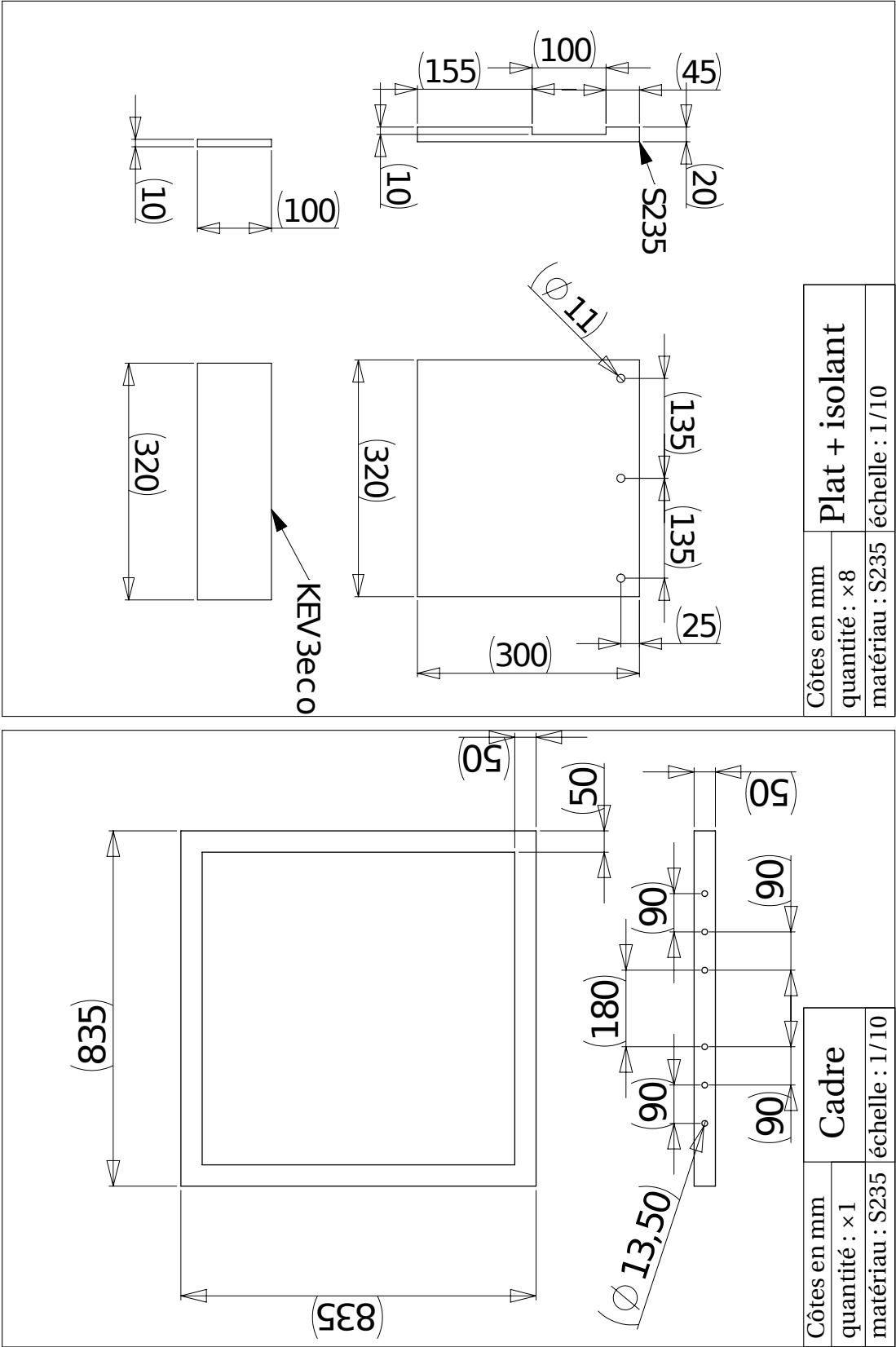








Instabilités locales de structures composites acier-béton aux températures élevées



# Bibliographie

- [Abbas, 2013] ABBAS, M. (2013). Algorithme non linéaire quasi-statique (stat\_non\_line). Rapport technique, EDF. clé : R5.03.01, manuel de référence pour Code\_Aster.
- [ACI, 2007] ACI (2007). *Code Requirements for Nuclear Safety-Related Concrete Structures (ACI 349-06) and Commentary*. American Concrete Institute Committee 349, 38800 Country Club Drive Farmington Hills, MI 48331 U.S.A.), obayashi corporation édition.
- [AISC, 2012] AISC (2012). *Specification for Safety-Related Steel Structures for Nuclear Facilities (AISC N690-12 (2012)) and Commentary*. American Institute of Steel Construction (AISC).
- [Akita *et al.*, 2001] AKITA, S., OZAKI, M., NIWA, N., MATSUO, I. et HARA, K. (2001). Study on steel plate reinforced concrete bearing wall for nuclear power plants - part.2; analytical method to evaluate response of sc walls. *In 16th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, page 8, Washington, DC.
- [Akiyama *et al.*, 1991] AKIYAMA, H., SEKIMOTO, H., FUKIHARA, M., NAKANISHI, K. et HARA, K. (1991). A compression and shear loading test of a concrete filled steel bearing wall. *In Transactions of the 11th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT 11)*, Tokyo.
- [Al Khalaf et Page, 1979] AL KHALAF, M. et PAGE, C. (1979). Steel/mortar interfaces : microstructural features and mode of failure. *Cement and Concrete Research*, 9(2):197–207.
- [Batina, 1990] BATINA, J. T. (1990). Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. *AIAA Journal*, 28:1381–1388.
- [Bažant et Cedolin, 2010] BAŽANT, Z. P. et CEDOLIN, L. (2010). *Stability of structures : elastic, inelastic, fracture and damage theories*. World Scientific.
- [Beaubier *et al.*, 2014] BEAUBIER, B., DUFOUR, J.-E., HILD, F., ROUX, S., LAVERNHE, S. et LAVERNHE-TAILLARD, K. (2014). Cad-based calibration and shape measurement with stereodic. *Experimental Mechanics*, 54(3):329–341.
- [Berger, 1954] BERGER, H. M. (1954). A new approach to the analysis of large deflections of plates.
- [Bloom et Coffin, 2000] BLOOM, F. et COFFIN, D. (2000). *Handbook of thin plate buckling and postbuckling*. CRC Press.

- [Blundell *et al.*, 1976] BLUNDELL, R., DIAMOND, C. et BROWNE, R. (1976). The properties of concrete subjected to high temperatures. Rapport technique, Imperial College (London). CIRIA Underwater Engineering Group.
- [Bolay et Weimer, 1960] BOLAY, R. et WEIMER, J. (1960). *Theory of Thermal Stress*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [Booth *et al.*, 2007] BOOTH, P. N., VARMA, A. H., MALUSHTE, S. R. et JOHNSON, W. H. (2007). Sresponse of modular composite walls to combined thermal and mechanical load. *In 19th International Conference on Structural Mechanic in Reactor Technology*, Toronto, Canada.
- [Bowerman *et al.*, 2003] BOWERMAN, H., GOUGH, M. et KING, C. (2003). *Bi-Steel : Design and Construction Guide, 2nd Edition*. Corus UK.
- [Bowerman et Borgan, 1995] BOWERMAN, H. G. et BURGAN, B. A. (1995). Improvements in and relating to double skin composite panels. brevet EP0752037 B1 ; déposant Corus UK Limited ; Classification internationale B23K31/02, E04C2/34, E04C2/26, B23K11/00, B28B23/02, E04B2/86 ; Classification européenne B23K31/02, E04B2/86G, B23K11/00F10, E04C2/34, E04C2/26.
- [Box *et al.*, 1978] BOX, G. E., HUNTER, W. G., HUNTER, J. S. *et al.* (1978). Statistics for experimenters.
- [Buckingham, 1914] BUCKINGHAM, E. (1914). On physically similar systems ; illustration of the use of dimensional analysis. *Physical Review*, 4:345–376.
- [Borgan, 1997] BURGAN, B. A. (1997). Double skin composite construction for submerged tube tunnels phase 3. Rapport technique, The Steel Construction Institute.
- [Borgan, 2011] BURGAN, B. A. (2011). A concrete history. *Nuclear Engineering International*, page 19.
- [Borgan et Eleftherios, 2014] BURGAN, B. A. et ELEFThERIOS, A. (2014). Assessment of existing information and identification of gaps (science wp1). Rapport technique, Steel Construction Institute.
- [Castillo et Durrani, 1990] CASTILLO, C. et DURRANI, A. J. (1990). Effect of transient high temperature on high-strength concrete. *ACI Materials Journal*, 87(1):47.
- [CEN, 2004a] CEN (2004a). *Eurocode 2 : Design of concrete structures - Part 1-1 : General rules and rules for Buildings*. Comité européen de normalisation. EN 1992-1-1.
- [CEN, 2004b] CEN (2004b). *Eurocode 2 : Design of concrete structures - Part 1-2 : General rules and rules for Buildings — Structural fire design*. Comité européen de normalisation. EN 1992-1-1.
- [CEN, 2004c] CEN (2004c). *Eurocode 4 : Design of composite steel and concrete structures - Part 1-1 : General rules and rules for Buildings*. Comité européen de normalisation. EN 1994-1-1.
- [CEN, 2005a] CEN (2005a). *Eurocode 3 : Design of steel structures - Part 1-1 : General rules and rules for Buildings*. Comité européen de normalisation. EN 1993-1-1.
- [CEN, 2005b] CEN (2005b). *Eurocode 3 : Design of steel structures - Part 1-2 : General rules — Structural fire design*. Comité européen de normalisation. EN 1993-1-2.

- [Chang *et al.*, 2006] CHANG, Y.-F., CHEN, Y.-H., SHEU, M.-S. et YAO, G. C. (2006). Residual stress-strain relationship for concrete after exposure to high temperatures. *Cement and Concrete Research*, 36(10):1999–2005.
- [Choi et Han, 2009] CHOI, J. B. et HAN, H. (2009). An experiment on compressive profile of the unstiffened steel plate-concrete structures under compression loading. *Steel and Composite Structures*, 9:519–534.
- [Condu, 2004] CONDU, M. (2004). Construction and commissioning experience of evolutionary water cooled nuclear power plants (iaea-tecdoc-1390). Rapport technique, International Atomic Energy Agency.
- [Conti *et al.*, 2013] CONTI, J., HOLTBERG, P. et DOMAN, L. E. (2013). International energy outlook 2013 - with projections to 2040 (ieo2013). Rapport technique, U.S. Energy Information Administration.
- [Cooke, 1988] COOKE, G. M. E. (1988). An introduction to the mechanical properties of structural steel at elevated temperatures. *Fire Safety Journal*, 13:45–54.
- [Cooper *et al.*, 1969] COOPER, M., MIKIC, B. et YOVANOVICH, M. (1969). Thermal contact conductance. *International Journal of heat and mass transfer*, 12(3):279–300.
- [Cosgrove *et al.*, 2008] COSGROVE, T., KING, C. et YANDZIO, E. (2008). *Design of building cores using Corefast*. The Steel Construction Institute.
- [Couturier, 2012] COUTURIER, J. (2012). Panorama des filières de réacteurs de génération IV, appréciations en matière de sûreté et de radioprotection ( irsn/dg/2012-00002). Rapport technique, IRSN.
- [Crosbie *et al.*, 2004] CROSBIE, L. M., KIDWELL, K. et MCCURDY, W. (2004). Construction schedule evaluation (doe np2010). Rapport technique, U.S. Department of Energy.
- [Dawe et Roufaeil, 1982] DAWE, D. et ROUF AEIL, O. (1982). Buckling of rectangular mindlin plates. *Computers & Structures*, 15(4):461–471.
- [Delmas, 2012] DELMAS, A. (2012). *Contribution à l'étude de l'effet mirage : application aux mesures dimensionnelle et thermique par caméras visible proche infrarouge*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse).
- [Ding et Wang, 2007] DING, J. et WANG, Y. (2007). Realistic modelling of thermal and structural behaviour of unprotected concrete filled tubular columns in fire. *Journal of Constructional Steel Research*, 64:1086–1102.
- [Dubas, 1955] DUBAS, P. (1955). *Calcul numérique des plaques et des parois minces*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale, Zürich. Nr. 2365, 0000.
- [Dufour, 2015] DUFOUR, J.-E. (2015). *Mesures de forme, de déplacement, et de paramètres mécaniques par stéréo-correlation d'images isogéométriques*. Thèse de doctorat, ENS Cachan, Paris.
- [Dumir, 1988] DUMIR, P. (1988). Thermal posybuckling of rectangular plates on pasternak elastic foundations. *Mechanics research communications*, 15(6):371–379.
- [EDF, 2006] EDF (2006). *EPR Technical Code for Civil Works" ETC-C*. French Society for Design, Construction, and in Service Inspection Rules for Nuclear Island Components.



- [Farhat *et al.*, 1998] FARHAT, C., LESOINNE, M. et LE TALLEC, M. (1998). Load and motion transfer algorithms for fluide/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces : Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticty. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157:95–114.
- [Farhat *et al.*, 1995] FARHAT, C., LESOINNE, M. et MAMAN, N. (1995). Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems : three-field formulation, geometric conservation and distributed solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 21:807–835.
- [Felicetti et Gambarova, 1999] FELICETTI, R. et GAMBAROVA, P. (1999). On the residual tensile properties of high performance siliceous concrete exposed to high temperature. *Mechanics of quasi-brittle materials and structures*. Hermes Sciences Publications.
- [Gallocher *et al.*, 2011] GALLOCHER, S., KOUREPINIS, D. et WHITTAKER, A. (2011). Global buckling and load transfer behaviour of sc modular elements in safety-related nuclear structures. *In Transactions of the 21 th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*.
- [Ghojel, 2004] GHOJEL, J. (2004). Experimental and analytical technique for estimating interface thermal conductance in composite structural elements under simulated fire conditions. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 28(4):347–354.
- [Gossard *et al.*, 1952] GOSSARD, M. L., SEIDE, P. et ROBERTS, W. M. (1952). Thermal buckling of plates. Rapport technique, National Advisory Committee for Aeronautics. NACA TN 2771.
- [Goupy, 2000] GOUPY, J. (2000). Modélisation par les plans d'expériences. *Techniques de l'ingénieur. Mesures et contrôle*, (R275):R275–1.
- [Haddad *et al.*, 2008] HADDAD, R., AL-SALEH, R. et AL-AKHRAS, N. M. (2008). Effect of elevated temperature on bond between steel reinforcement and fiber reinforced concrete. *Fire Safety Journal*, 43(5):334–343.
- [Hager, 2004] HAGER, I. (2004). *Comportement à haute température des bétons à haute performance : évolution des principales propriétés mécaniques*. Thèse de doctorat, Marne-la-Vallée, ENPC.
- [Han, 2001] HAN, L.-H. (2001). Fire performance of concrete filled steel tubular beam-columns. *Journal of Constructional Steel Research*, 57:695–709.
- [Han *et al.*, 2003] HAN, L.-H., YANG, Y.-F. et XU, L. (2003). An experimental study and calculation on the fire resistance of concrete-filled shs and rhs columns. *Journal of Constructional Steel Research*, 59:427–452.
- [Heldenfels et Roberts, 1952] HELDENFELS, R. R. et ROBERTS, W. M. (1952). Experimental and theoretical determination of thermal stresses in a flat plate. Rapport technique, National Advisory Committee for Aeronautics. NACA TN 2769.
- [Holmes *et al.*, 1982] HOLMES, M., ANCHOR, R. D., COOK, G. M. E. et CROOK, R. N. (1982). The effects of elevated temperatures on the strength properties of reinforcing and prestressing steels. *The structural engineer*, 60B(1):7–13.

- [Hong *et al.*, 2010] HONG, S.-G., KIM, W., LEE, K.-J. et LEE, D.-H. (2010). Out-of-plane shear strength of steel-plate-reinforced concrete walls dependent on bond behavior. *Journal of Disaster Research*, 5:385–393.
- [Hutchinson et Neale, 1978] HUTCHINSON, J. et NEALE, K. (1978). Sheet necking-ii. time-independent behavior. In *Mechanics of sheet metal forming*, pages 127–153. Springer.
- [Hutchinson, 1973] HUTCHINSON, J. W. (1973). Plastic buckling. Rapport technique, DTIC Document.
- [Ibrahimbegovic, 2006a] IBRAHIMBEGOVIC, A. (2006a). *Mécanique non linéaire des solides déformables : formulation théorique et résolution numérique par éléments finis (Coll. Etudes en mécanique des matériaux et des structures)*, chapitre Grandes transformations. In [Ibrahimbegovic, 2006d].
- [Ibrahimbegovic, 2006b] IBRAHIMBEGOVIC, A. (2006b). *Mécanique non linéaire des solides déformables : formulation théorique et résolution numérique par éléments finis (Coll. Etudes en mécanique des matériaux et des structures)*, chapitre Instabilité géométrique et matérielle. In [Ibrahimbegovic, 2006d].
- [Ibrahimbegovic, 2006c] IBRAHIMBEGOVIC, A. (2006c). *Mécanique non linéaire des solides déformables : formulation théorique et résolution numérique par éléments finis (Coll. Etudes en mécanique des matériaux et des structures)*, chapitre Thermodynamique et résolution des problèmes couplés. In [Ibrahimbegovic, 2006d].
- [Ibrahimbegovic, 2006d] IBRAHIMBEGOVIC, A. (2006d). *Mécanique non linéaire des solides déformables : formulation théorique et résolution numérique par éléments finis (Coll. Etudes en mécanique des matériaux et des structures)*. Hermes Science Publications.
- [Ijichi *et al.*, 2002] IJICHI, H., TSUTAGAWA, M., OOSHIMA, N., MORI, H., MIURA, J., KANECHIKA, M. et MIURA, N. (2002). Development of advanced concept for shortening construction period of ABWR plant. volume Proceedings of ICONE10, Arlington, VA. ASME.
- [Ilyushin, 1948] ILYUSHIN, A. (1948). The theory of elasto-plastic strains and its application. *Bulletin of Academic Science, URSS, Sec. Tech. Services*, pages 769–788.
- [JEA, 2012] JEA (2012). *Technical Code for Aseismic Design of Steel Plate Reinforced Concrete Structures, Translation of JEAC 4618-2009*. Japan Electric Association, obayashi corporation édition.
- [Kanchi, 1996] KANCHI, M. (1996). Experimental study on a concrete filled steel structure part.2 compressive tests. In *Summaries of technical papers of Annual Meeting Architectural Institute of Japan. B-2, Structures II, Structural dynamics nuclear power plants*, page 1071–1072.
- [Kaneuji *et al.*, 1989] KANEUJI, A., OKUDA, Y., HARA, K. et MASUMOTO, H. (1989). Feasibility study of concrete filled steel (sc) structure for reactor building. In *Transaction of the 10th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, page 67–72.
- [Kankanamge et Mahendran, 2011] KANKANAMGE, N. D. et MAHENDRAN, M. (2011). Mechanical properties of cold-formed steels at elevated temperatures. *Thin-Walled Structures*, 49:26–44.

- [Katoh *et al.*, 2011] KATOH, A., NEGISHI, K., YAMAMOTO, T., AKIYAMA, Y., HARA, H. et IWASAKI, M. (2011). Experimental and feasibility study on steel-plate-reinforced-concrete containment vessel for japan sodium-cooled fast reactor. *In Transaction of the 21th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*.
- [Kazymyrenko, 2013] KAZYMYRENKO, K. (2013). Méthodes de pilotage du chargement. Rapport technique, EDF clé : R5.03.80, manuel de référence pour Code\_Aster.
- [Kazymyrenko, 2014] KAZYMYRENKO, K. (2014). Lois de comportement des joints des barrages : Joint\_meca\_rupt et joint\_meca\_frot. Rapport technique, EDF clé : R7.01.25, manuel de référence pour Code\_Aster.
- [KEPI, 2009] KEPI (2009). *Specification for Safety-Related Steel Plate Concrete Structures for Nuclear Facilities (KEPIC-SNG (2009)) and Commentary*. Korea Electric Power Industry (KEPI).
- [Khan, 2002] KHAN, M. I. (2002). Factors affecting the thermal properties of concrete and applicability of its prediction models. *Building and Environment*, 37:607–614.
- [Kodaira *et al.*, 2003] KODAIRA, A., KANCHI, M., FUJINAKA, H., AKITA, S. et OZAKI, M. (2003). Fire resistance of a steel plate reinforced concrete bearing wall. *Journal of structural and construction engineering*, (568):153–158.
- [Kodur, 1999] KODUR, V. K. R. (1999). Performance-based fire resistance design of concrete-filled steel columns. *Journal of Constructional Steel Research*, 51:21–36.
- [Kodur, 2007] KODUR, V. K. R. (2007). Guidelines for fire resistant design of concrete-filled steel hss columns - state-of-the-art and research needs. *Steel Structures*, 7:173–182.
- [Kodur et Lie, 1997] KODUR, V. K. R. et LIE, T. T. (1997). Evaluation of fire resistance of rectangular steel columns filled with fibre-reinforced concrete. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 24:339–349.
- [Kodur et Mackinnon, 1999] KODUR, V. K. R. et MACKINNON, D. H. (1999). Design of concrete-filled hollow structural steel columns for fire endurance. *Engineering Journal - American Institute of Steel Construction*, 37(1):13–24.
- [Koiter, 1945] KOITER, W. T. (1945). *Over de Stabiliteit van het Elastisch Evenwicht*. Thèse de doctorat, Technische Hooze School, Delft. English translation; NASA; Air Force Flight Dynamic Lab., 1970.
- [Leekitwattana, 2011] LEEKITWATTANA, M. (2011). *Analysis of an Alternative Topology for Steel-Concrete-Steel Sandwich Beams Incorporating Inclined Shear Connectors*. Thèse de doctorat, University of Southampton.
- [Lemaitre *et al.*, 2009a] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J. L., BENALLAL, A. et DESMORAT, R. (2009a). *Mécanique des matériaux solides*, chapitre Élasto-plasticité. In [Lemaitre *et al.*, 2009c], 3 édition. 577 p.
- [Lemaitre *et al.*, 2009b] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J. L., BENALLAL, A. et DESMORAT, R. (2009b). *Mécanique des matériaux solides*, chapitre Endommagement. In [Lemaitre *et al.*, 2009c], 3 édition. 577 p.

- [Lemaitre *et al.*, 2009c] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J. L., BENALLAL, A. et DESMORAT, R. (2009c). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 3 édition. 577 p.
- [Leplay, 2011] LEPLAY, P. (2011). *Identification de comportements mécaniques et à rupture par corrélation d'images 2D et 3D : Application aux filtres à particules Diesel à base de titanate d'aluminium*. Thèse de doctorat, INSA Lyon.
- [Liang *et al.*, 2004] LIANG, Q. Q., UY, B., WRIGHT, H. D. et BRADFORD, M. A. (2004). Local buckling of steel plates in double skin composite panels under biaxial compression and shear. *Journal of structural engineering*, 130(3):443–451.
- [Liew et Sohel, 2009] LIEW, J. Y. R. et SOHEL, K. M. A. (2009). Lightweight steel-concrete-steel sandwich system with j-hook connectors. *Engineering Structures*, 31:1166–1178.
- [Liu et Fan, 2014] LIU, Z. et FAN, J. (2014). Technology readiness assessment of small modular reactor (smr) designs. *Progress in Nuclear Energy*, 70:20–28.
- [Lyons *et al.*, 1996] LYONS, J., LIU, J. et SUTTON, M. (1996). High-temperature deformation measurements using digital-image correlation. *Experimental mechanics*, 36(1):64–70.
- [Malushte et Varma, 2010] MALUSHTE, S. et VARMA, A. H. (2010). Commentary for (aisc n690) chapter n9b. Rapport technique, AISC TC12 Subcommittee for SC structures.
- [Martin, 2007] MARTIN, M. (2007). *Etude de la texture de la surface coffrée des parements verticaux en béton*. Thèse de doctorat, Université Laval.
- [Maunder, 2003] MAUNDER, E. A. W. (2003). Trefftz in translation. *In Computer Assisted Methods in Engineering and Science*, volume 10, pages 545–563, Zurich.
- [Mays et Vardy, 1982] MAYS, G. et VARDY, A. (1982). Adhesive-bonded steel/concrete composite construction. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 2(2):103–107.
- [Mazars, 1986] MAZARS, J. (1986). A description of micro- and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 25:729–737.
- [Mazars *et al.*, 1990] MAZARS, J., BERTHAUD, Y. et RAMTANI, S. (1990). The unilateral behaviour of damaged concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 35(4):629–635.
- [Mindeguia, 2009] MINDEGUIA, J.-C. (2009). *Contribution expérimentale à la compréhension des risques d'instabilité thermique des bétons*. Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour.
- [Moon *et al.*, 2009] MOON, I. H., JEE, N. Y., KIM, W. K., LEE, C. S. et YOO, S. T. (2009). Performance-based design of stiffened steel plate concrete wall in fire. *In 20th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Espoo, Finland.
- [Moutoussamy, 2013] MOUTOUSSAMY, L. (2013). *Essais hybrides en temps réel sur structures de génie civil*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- [Müller, 2013] MÜLLER, M. (2013). Structural interaction of liner with the concrete part integrity for loca load combination considering pre-stressing forces and ageing effects due to creep and shrinkage. Rapport technique, Karlsruher Institut für Technologie. Project ACCEPT : Ageing of Concrete and Civil structures in nuclear Power Plants, report 1360510153.

- [Murphy, 1972] MURPHY, G. (1972). Applications of similitude to the structural mechanics of reactors. *Nuclear Engineering and Design*, 19(1):199–206.
- [Murphy et Ferreira, 2001] MURPHY, K. D. et FERREIRA, D. (2001). Thermal buckling of rectangular plates. *International journal of solids and structures*, 38(22):3979–3994.
- [Mézière, 2004] MÉZIÈRE, Y. (2004). Impact des déformations différées sur le comportement de la zone courante de la peau d'étanchéité des enceintes à simple paroi - site de fessenheim. Rapport technique, EDF SEPTEN. ENRETM040100.
- [Narayanan *et al.*, 1994] NARAYANAN, R., ROBERTS, T. M. et NAJI, F. J. (1994). Design guide for steel-concrete-steel sandwich construction - volume 1 : General principles and rules for basic elements (sci-p131). Rapport technique.
- [Naus, 2010] NAUS, D. (2010). A compilation of elevated temperature concrete material property data and information for use in assessments of nuclear power plant reinforced concrete structures : Prepared by dj naus. Rapport technique nureg/cr-7031, US Nuclear Regulatory Commission, Office of Nuclear Regulatory Research.
- [Nechnech, 2000] NECHNECH, W. (2000). *Contribution à l'étude numérique du comportement du béton et des structures en béton armé soumises à des sollicitations thermiques et mécaniques couplées : une approche thermo-élasto-plastique endommageable*. Thèse de doctorat, INSA Lyon. 2000ISAL0084.
- [Niousha *et al.*, 2007] NIOUSHA, A., NAITO, Y., MIYASAKA, E. et UCHIYAMA, S. (2007). Dynamic characteristics of a sc building in kashiwazaki npp site using vibration test – part 1 : Data analysis and system identification. *In Transactions of SMiRT 19*, Toronto.
- [Oduyemi et Wright, 1989] ODUYEMI, T. O. S. et WRIGHT, H. D. (1989). An experimental investigation into the behaviour of double skin sandwich beams. *Journal of Constructional Steel Research*, 14:197–220.
- [Ollgaard *et al.*, 1971] OLLGAARD, J. G., SLUTTER, R. G. et FISHER., J. W. (1971). Shear strength of stud connectors in lightweight and normal-weight concrete. *AISC Engineering Journal*, 8:55–64.
- [Ozaki *et al.*, 1995] OZAKI, M., AKITA, S., NIWA, N., MATSUO, I. et USAMI, S. (1995). Study on a concrete filled structure for nuclear power plants - part 1 ; shear and bending loading tests on sc wall. *In 13th International Conference on Structural Mechanic in Reactor Technology*, page 8, Porto Alegre, Brésil. Escola de Engenharia - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [Ozaki *et al.*, 2004] OZAKI, M., AKITA, S., OSUGA, H., NAKAYAMA, T. et ADACHI, N. (2004). Study on steel plate reinforced concrete panels subjected to cyclic in-plane shear. *Nuclear Engineering and Design*, 228:225–244.
- [Ozaki *et al.*, 2000] OZAKI, M., AKITA, S., TAKEUCHI, M., OOSUGA, H., NAKAYAMA, T. et NIWA, H. (2000). Experimental study on steel plate reinforced concrete structure : Part 41 heating tests(outline of experimental program and results). *Summaries of technical papers of Annual Meeting Architectural Institute of Japan. B-2, Structures II, Structural dynamics nuclear power plants*, 2000:1127–1128.

- [Piegl et Tiller, 1997] PIEGL, L. et TILLER, W. (1997). *The NURBS book - 2<sup>nd</sup> edition*. Springer Science & Business Media.
- [Piperno, 1997a] PIPERNO, S. (1997a). Explicit/implicit fluid/structure staggered procedures with a structural predictor and fluid subcycling for 2d inviscid aeroelastic simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25:1207–1226.
- [Piperno, 1997b] PIPERNO, S. (1997b). Interaction fluide-structure. Rapport technique Master de Mécanique Numérique, Ecole nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [Piperno et Farhat, 2001] PIPERNO, S. et FARHAT, C. (2001). Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems - part ii : Energy transfer analysis and three-dimensional applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:3147–3170.
- [Pride et Heimerl, 1949] PRIDE, R. A. et HEIMERL, G. J. (1949). Plastic buckling of simply supported compressed plates. Rapport technique, National Advisory Committee for Aeronautics. NACA TN 1817.
- [Ramtani, 1990] RAMTANI, S. (1990). *Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral*. Thèse de doctorat, Université Paris 6. 1990PA066286.
- [Ramtani et al., 1992] RAMTANI, S., BERTHAUD, Y. et MAZARS, J. (1992). Orthotropic behavior of concrete with directional aspects : modelling and experiments. *Nuclear Engineering and Design*, 133(1):97–111.
- [Ray, 1996] RAY, H. (1996). Bi-directionally corrugated sandwich construction. brevet US5543204 A ; cessionnaire d'origine : The United States Of America As Represented By The Secretary Of The Navy.
- [Reinhardt et Cornelissen, 1984] REINHARDT, H. et CORNELISSEN, H. (1984). Post-peak cyclic behaviour of concrete in uniaxial tensile and alternating tensile and compressive loading. *Cement and concrete research*, 14(2):263–270.
- [Reissner, 1975] REISSNER, E. (1975). On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 11(5):569–573.
- [Rhodes, 2002] RHODES, J. (2002). Buckling of thin plates and members — and early work on rectangular tubes. *Thin-Walled Structures*, 40(2):87–108.
- [Riks, 1978] RIKS, E. (1978). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids Structures*, 15(7):529–551.
- [Riks, 1984] RIKS, E. (1984). Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47:219–259.
- [Roberts et Dogan, 1995] ROBERTS, T. M. et DOGAN, O. (1995). Fatigue tests on scs beams, final report. Rapport technique, Cardiff School of Engineering.
- [Roberts et Dogan, 1998] ROBERTS, T. M. et DOGAN, O. (1998). Fatigue of welded stud shear connectors in steel–concrete–steel sandwich beams. *Journal of Constructional Steel Research*, 45: :301–320.

- [Roberts *et al.*, 1996] ROBERTS, T. M., EDWARDS, D. N. et NARAYANAN, R. (1996). Testing and analysis of steel-concrete-steel sandwich beams. *Journal of Constructional Steel Research*, 38: :257–279.
- [Rush, 2013] RUSH, D. I. (2013). *Fire performance of unprotected and protected concrete filled steel hollow structural sections*. Thèse de doctorat, The University of Edinburgh.
- [Sasaki *et al.*, 1995] SASAKI, N., AKIYAMA, H., NARIKAWA, M., HARA, K., TAKEUCHI, M. et US-AMI, S. (1995). Study on a concrete filled structure for nuclear power plants (part 3). shear and bending loading tests on wall members. *In 13th International Conference on Structural Mechanic in Reactor Technology*, pages 27–32, Porto Alegre, Brésil. Escola de Engenharia - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [Schlaseman et Jeffery, 2004] SCHLASEMAN, C. et JEFFERY, R. (2004). Application of advanced construction technologies to new nuclear power plants (mpr-2610). Rapport technique, U.S. Department of Energy.
- [Schneider, 1976] SCHNEIDER, U. (1976). Behaviour of concrete under thermal steady state and non-steady state conditions. *Fire and Materials*, 1(3):103–115.
- [Schneider, 1988] SCHNEIDER, U. (1988). Concrete at high temperatures—a general review. *Fire safety journal*, 13(1):55–68.
- [Schulz, 2006] SCHULZ, T. (2006). Westinghouse AP1000 advanced passive plant. *Nuclear Engineering and Design*, 236:1547–1557.
- [Sekimoto et Kondo, 2001] SEKIMOTO, H. et KONDO, M. (2001). Study on property of concrete filled steel bearing wall subjected to high temperature. *Journal of structural engineering. B*, 47:481–490.
- [Sezawa, 1931] SEZAWA, K. (1931). On the buckling under edge thrusts of a rectangular plate clamped at four edges. *Proceedings of the Imperial Academy*, 7(2):48–51.
- [Shanley, 1947] SHANLEY, F. R. (1947). Inelastic column theory. *Journal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences)*, 14(5).
- [Shanmugam et Lakshmi, 2001] SHANMUGAM, N. et LAKSHMI, B. (2001). State of the art report on steel–concrete composite columns. *Journal of Constructional Steel Research*, 57:1041–1080.
- [Singer, 1987] SINGER, J. (1987). Experimental techniques and comparison with theoretical results. *In Buckling and Post-Buckling*, pages 185–246. Springer.
- [Sohel et Liew, 2011] SOHEL, K. M. A. et LIEW, J. Y. R. (2011). Steel–concrete–steel sandwich slabs with lightweight core — static performance. *Engineering Structures*, 33:981–992.
- [Solomon *et al.*, 1976] SOLOMON, S. K., SMITH, D. W. et CUSENS, A. R. (1976). Flexural tests of steel-concrete-steel sandwiches. *Magazine of Concrete Research*, 28(94):13–20.
- [Stowell, 1948] STOWELL, E. Z. (1948). A unified theory of plastic buckling of columns and plates.
- [Sutharshan *et al.*, 2011] SUTHARSHAN, B., MUTYALA, M., VIJUK, R. P. et MISHRA, A. (2011). The AP1000<sup>tm</sup> reactor : Passive safety and modular design. *Energy Procedia*, 7:293–302.

- [Suzuki *et al.*, 1995] SUZUKI, N., AKIYAMA, H., NARIKAWA, M., TAKEUCHI, M. et MATSUO, I. (1995). Study on a concrete filled structure for nuclear power plants (part 4). analytical method to estimate shear strength. *In 13th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, pages 33–38, Porto Alegre, Brésil. Escola de Engenharia - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [Sédov, 1972] SÉDOV, L. (1972). *Similitude et dimensions en mécanique*. Mir (Moscou). traduction française de la septième édition russe, augmentée et remaniée, 1977.
- [Taguchi, 1987] TAGUCHI, G. (1987). System of experimental design; engineering methods to optimize quality and minimize costs. Rapport technique.
- [Takeuchi *et al.*, 1998] TAKEUCHI, M., NARIKAWA, M., MATSUO, I., HARA, K. et USAMI, S. (1998). Study on a concrete filled structure for nuclear power plants. *Nuclear Engineering and Design*, 179:209–223.
- [Terrien, 1980] TERRIEN, M. (1980). Emission acoustique et "comportement mécanique post-critique" d'un béton sollicité en traction. *BULL LIAISON LAB PONTS CHAUSS*, (105).
- [Thomann, 2005] THOMANN, M. (2005). Connexion par adhérence. Rapport d'essais ICOM 535, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL) - Laboratoire de la construction métallique (ICOM).
- [Thor, 1973] THOR, J. (1973). Deformations and critical loads of steel beams under fire exposure conditions. Rapport technique, Lund Institute of Technology. D16 :1973, bulletin 35.
- [Timoshenko et Gere, 1961] TIMOSHENKO, S. P. et GERE, J. M. (1961). *Theory of elastic stability*. 1961. McGrawHill-Kogakusha Ltd, Tokyo.
- [Treffitz, 1926] TREFFTZ, E. (1926). A counterpart to ritz's method. *In Proceedings of the 2nd International Congress of Applied Mechanics*, pages 131–137, Zurich. English translation in appendix of [Maunder, 2003].
- [Tuscher et Shaparevich, 2014] TUSCHER, J.-L. et SHAPAREVICH, Y. (2014). Comparison of the design of a building in steel-concrete and in reinforced concrete. *In 2nd Technical Innovation in Nuclear Civil Engineering*, Cachan, France. TINCE.
- [Uemura *et al.*, 1962] UEMURA, M., SUNAKAWA, M. et FUYUKI, M. (1962). A rapid radiant heating apparatus and an experiment on the thermal deformation of clamped square plate. *Journal of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, 10(98):79–85.
- [Usami *et al.*, 1995] USAMI, S., AKIYAMA, H., NARIKAWA, M., HARA, K., TAKEUCHI, M. et SASAKI, N. (1995). Study on a concrete filled structure for nuclear power plants (2). compressive loading tests on wall members. *In 13th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, pages 21–26, Porto Alegre, Brésil. Escola de Engenharia - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [Varma *et al.*, 2009] VARMA, A., MALUSHTTE, S., SENER, K. et BOOTH, P. (2009). Analysis and design of modular composite walls for combined thermal and mechanical loading. *In 20th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Espoo, Finland.



- [Varma *et al.*, 2013a] VARMA, A., ZANG, K. et MALUSHTE, S. (2013a). Local buckling of sc composite walls at ambient and elevated temperatures. *In 22th International Conference on Structural Mechanic in Reactor Technology*, San Francisco, USA.
- [Varma *et al.*, 2011a] VARMA, A. H., MALUSHTE, S. R., SENER, K. C., BOOTH, P. N. et COOGLER, K. (2011a). Steel-plate composite (sc) walls : Analysis and design including thermal effects. *In 21th International Conference on Structural Mechanic in Reactor Technology*, New Delhi, India.
- [Varma *et al.*, 2011b] VARMA, A. H., MALUSHTE, S. R., SENER, K. C. et LAI, Z. (2011b). Steel-plate composite (sc) walls for safety related nuclear facilities : design for in-plane and out-of-plane demands. *In 21th International Conference on Structural Mechanic in Reactor Technology*, New Delhi, India.
- [Varma *et al.*, 2013b] VARMA, A. H., SENER, K. C. et WINKLER, D. (2013b). Behavior and design of sc composite walls for accident thermal loading. *In 22th International Conference on Structural Mechanic in Reactor Technology*, San Francisco, California, USA.
- [Varma *et al.*, 2011c] VARMA, A. H., SENER, K. C., ZHANG, K., COOGLER, K. et MALUSHTE, S. R. (2011c). Out-of-plane shear behavior of sc composite structures. *In 21th International Conference on Structural Mechanic in Reactor Technology*, New Delhi, India.
- [Varma *et al.*, 2011d] VARMA, A. H., ZHANG, K., CHI, H., BOOTH, P. et BAKER, T. (2011d). In-plane shear behavior of sc composite walls : Theory vs. experiment. *In 21th International Conference on Structural Mechanic in Reactor Technology*, New Delhi, India.
- [Wang *et al.*, 2001] WANG, C., XIANG, Y. et CHAKRABARTY, J. (2001). Elastic/plastic buckling of thick plates. *International journal of solids and structures*, 38(48):8617–8640.
- [Wierzbicki, 2006a] WIERZBICKI, T. (2006a). Part i : Plates and shells. 2.081 J/16.230 J Plates and Shells, Spring 2006. Massachusetts Institute of Technology : MIT OpenCourseWare, <http://ocw.mit.edu>.
- [Wierzbicki, 2006b] WIERZBICKI, T. (2006b). Part ii : Plastic analysis of plates and shells. 2.081 J/16.230 J Plates and Shells, Spring 2006. Massachusetts Institute of Technology : MIT OpenCourseWare, <http://ocw.mit.edu>.
- [Willam *et al.*, 2009] WILLAM, K., XI, Y., LEE, K. et KIM, B. (2009). Thermal of reinforced concrete structures in nuclear power plants. Rapport technique, University of Colorado at Boulder. SESM No. 02-2009.
- [Winitzki, 2003] WINITZKI, S. (2003). Uniform approximations for transcendental functions. *In Computational Science and Its Applications - ICCSA 2003*, Montreal.
- [Winter, 1947] WINTER, G. (1947). Strength of thin steel compression flanges. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 112(1):527–554.
- [Wright, 1993] WRIGHT, H. D. (1993). Buckling of plates in contact with a rigid medium. *Structural Engineer*, 71(12):2019–215.
- [Wright *et al.*, 1991] WRIGHT, H. D., ODUYEMI, T. O. S. et EVANS, H. R. (1991). The design of double skin composite elements. *Journal of Constructional Steel Research*, 19:111–132.

- [Xie et Chapman, 2006] XIE, M. et CHAPMAN, J. C. (2006). Developments in sandwich construction. *Journal of Constructional Steel Research*, 62:1123–1133.
- [Xie *et al.*, 2004] XIE, M., FOUNDOUKOS, N. et CHAPMAN, J. C. (2004). Experimental and numerical investigation on the shear behaviour of friction-welded bar–plate connections embedded in concrete. *Journal of Constructional Steel Research*, 61:625–649.
- [Xie *et al.*, 2007] XIE, M., FOUNDOUKOS, N. et CHAPMAN, J. C. (2007). Static tests on steel–concrete–steel sandwich beams. *Journal of Constructional Steel Research*, 63: 735–750.
- [Yovanovich *et al.*, 1997] YOVANOVICH, M., CULHAM, J. et TEERTSTRA, P. (1997). Calculating interface resistance. *Electronics Cooling*, 3(2):24–29.
- [Yu *et al.*, 2006] YU, C., HUANG, Z., BURGESS, I. W. et PLANK, R. J. (2006). 3d modelling of bi-steel structures subject to fire. *In Proceedings of the Fourth International Workshop Structures in Fire*, University of Aveiro Aveiro, Portugal.
- [Zhang *et al.*, 2014] ZHANG, K., VARMA, A. H., MALUSHTE, S. R. et GALLOCHER, S. (2014). Effect of shear connectors on local buckling and composite action in steel concrete composite walls. *Nuclear Engineering and Design*, 269:231– 239.



# Index des auteurs

- Abbas, M., 52–54, 67  
 ACI, Committee 349, 7, 9, 10  
 Adachi, N., 24–26  
 AISC, 2, 8, 20, 22–24, 29, 30  
 Akita, S., 17, 24–26, 36  
 Akiyama, H., 24, 25, 27–29, 42, 152  
 Akiyama, Y., 12, 13, 16, 33, 36  
 Al Khalaf, M. N., 66  
 Anchor, R. D., 57  
  
 Baker, T., 26, 27  
 Batina, J. T., 71  
 Bažant, Z. P., 109, 112, 113  
 Beaubier, B., 159, 160  
 Benallal, A., 55, 56, 61  
 Berger, H. M., 112  
 Berthaud, Y., 61  
 Bloom, F., 119  
 Blundell, R., 63  
 Bolay R. A., 107, 109  
 Booth, P. N., 16, 26, 27, 31, 37–41, 162  
 Bowerman, H. G., 7, 9  
 Box G. E. P., 90  
 Bradford, M. A., 30, 55, 114  
 Browne, R. G., 63  
 Buckingham, E., 139, 141  
 Burgan, B. A., 7, 9, 12, 14, 17, 22, 24  
 Burgess, I. W., 31–33  
 Castillo, C., 62  
 Cedolin, L., 109, 112, 113  
 CEN, 9, 11, 57, 58, 60, 63–65  
 Chaboche, J. L., 55, 56, 61  
 Chakrabarty, J., 119, 226  
 Chang, Y-F., 198, 205  
 Chapman, J. C., 8, 14, 17–19, 24  
 Chen, Y-H., 198, 205  
 Chi, H., 26, 27  
 Choi, J. B., 29  
 Coffin, D., 119  
 Condu, M., 12  
 Conti, J., 1, 14, 15  
 Coogler, K., 18, 24, 37–41  
 Cooke, G. M. E., 57  
 Cooper, M. G., 68  
 Cornelissen, H. A. W., 61  
 Cosgrove, T., 33  
 Couturier, J., 14  
 Crook, R. N., 57  
 Crosbie, L. M., 12  
 Culham, J. R., 68, 170  
 Cusens, A. R., 7  
  
 Dawe, D. J., 105  
 Delmas, A., 161  
 Desmorat, R., 55, 56, 61  
 Diamond, C., 63  
 Ding, J., 70  
  
 Dogan, O., 7, 17  
 Doman, L. E., 1, 14, 15  
 Dubas, P., 117  
 Dufour, J-E., 158–160  
 Dumir, P. C., 226  
 Durrani, A. J., 62  
  
 EDF, 16  
 Edwards, D. N., 17–19, 24, 27, 28  
 Eleftherios, A., 9, 12, 14, 22, 24  
 Evans, H. R., 7, 22, 55  
  
 Fan, J., 1, 6, 14  
 Farhat, C., 71, 75  
 Felicetti, R., 198, 205  
 Ferreira, D., 95, 152  
 Fisher, J. W., 9  
 Foundoukos, N., 14, 17, 18  
 Fujinaka, H., 36  
 Fukihara, M., 29, 42, 152  
 Fuyuki, M., 152  
  
 Gallocher, S., 26, 28, 29  
 Gambarova, P. G., 198, 205  
 Gere, J. M., 114, 226  
 Ghojel, J., 69, 170  
 Gossard, M. L., 106, 109, 152  
 Gough, M., 9  
 Goupy, J., 89

- Hager, I., 34  
 Han, H.S., 29  
 Han, L-H., 33, 34  
 Hara, H., 12, 13, 16, 33, 36  
 Hara, K., 12–15, 17, 24–29, 42, 152  
 Heimerl, G. J., 120  
 Heldenfels, R. R., 107  
 Hild, F., 159, 160  
 Holmes, M., 57  
 Holtberg, P., 1, 14, 15  
 Hong, S-G., 19, 24  
 Huang, Z., 31–33  
 Hunter, J. S., 90  
 Hunter, W. G., 90  
 Hutchinson, J. W., 119  
  
 Ibrahimbegovic, A., 48–50, 53, 72  
 Ijichi, H., 12  
 Ilyushin, A. A., 119  
 Iwasaki, M., 12, 13, 16, 33, 36  
  
 JEA, 2, 8–12, 14, 15, 17, 19–24, 29, 30, 36  
 Jee, N. Y., 31, 33, 35  
 Johnson, W. H., 37–39, 162  
  
 Kanchi, M., 29, 36  
 Kanechika, M., 12  
 Kaneuji, A., 12, 13  
 Kankanamge, N. D., 57  
 Katoh, A., 12, 13, 16, 33, 36  
 Kazymyrenko, K., 52, 53, 67, 68  
 KEA, 2, 8, 10, 11, 15, 17, 20, 22–24, 29, 30  
 Khan, M. I., 32  
 Kidwell, K., 12  
 Kim, B., 57, 58, 62, 63  
 Kim, W., 19, 24  
 Kim, W. K., 31, 33, 35  
 King, C., 9, 33  
 Kodaira, A., 36  
 Kodur, V. K. R., 33, 34, 77  
 Koiter, W. T., 49  
 Kondo, M., 2, 138, 152  
 Kourepinis, D., 29  
  
 Lai, Z., 25, 26  
 Lakshm, B., 15  
 Lavernhe, S., 159, 160  
 Lavernhe-Taillard, K., 159, 160  
 Le Tallec, M., 71  
 Lee, C. S., 31, 33, 35  
 Lee, D-H., 19, 24  
 Lee, K-J., 19, 24  
 Lee, K., 57, 58, 62, 63  
 Leekitwattana, M., 11  
 Lemaitre, J., 55, 56, 61  
 Leplay, P., 161  
 Lesoinne, M., 71  
 Liang, Q. Q., 30, 55, 114  
 Lie, T. T., 33, 34  
 Liew, J. Y. R., 9, 11  
 Liu, J., 161  
 Liu, Z., 1, 6, 14  
 Lyons, J. S., 161  
  
 Mackinnon, D. H., 34, 77  
 Mahendran, M., 57  
 Malushte, S. R., 9, 16, 18, 24–26, 28, 29, 31, 37–42, 162  
 Maman, N., 71  
 Martin, M., 66  
 Masumoto, H., 12, 13  
 Matsuo, I., 12–15, 17, 24, 26, 28, 152  
 Mays, G. C., 66  
 Mazars, J., 60, 61, 74  
 McCurdy, W., 12  
 Mézière, Y., 127, 149, 237  
 Mikic, B. B., 68  
 Mindeguia, J-C., 34  
 Mishra, A., 14  
 Miura, J., 12  
 Miura, N., 12  
 Miyasaka, E., 14, 17  
 Moon, I. H., 31, 33, 35  
 Mori, H., 12  
 Moutoussamy, L., 72  
 Müller, M., 138, 152, 162  
 Murphy, G., 72, 141  
 Murphy, K. D., 95, 152  
 Mutyala, M., 14  
  
 Naito, Y., 14, 17  
 Naji, F. J., 7, 9, 11, 28, 129  
 Nakanishi, K., 29, 42, 152  
 Nakayama, T., 24–26  
 Narayanan, R., 7, 9, 11, 17–19, 24, 27, 28, 129  
 Narikawa, M., 12–15, 17, 24–29, 152  
 Naus, D., 64  
 Neale, K. W., 119  
 Nechnech, W., 63, 198, 203  
 Negishi, N., 12, 13, 16, 33, 36  
 Niousha, A., 14, 17  
 Niwa, N., 17  
  
 Oduyemi, T. O. S., 7, 17–19, 22, 27, 55  
 Okuda, Y., 12, 13  
 Ollgaard, J. G., 9  
 Ooshima, N., 12  
 Osuga, H., 24–26  
 Ozaki, M., 17, 24–26, 36  
  
 Page, C. L., 66  
 Piegl, L., 158  
 Piperno, S., 70, 71, 75  
 Plank, R. J., 31–33  
 Pride, R. A., 120

- Ramtani, S., 61  
 Ray, H., 11  
 Reinhardt, H. W., 61  
 Reissner, E., 105  
 Rhodes, J., 55  
 Riks, E., 48, 49, 51  
 Roberts, T. M., 7, 9, 11,  
     17–19, 24, 27, 28,  
     129  
 Roberts, W. M., 106, 107,  
     109, 152  
 Roufaeil, O. L., 105  
 Roux, S., 159, 160  
 Rush, D. I., 69  
 Russell, J., 12, 13, 15  
  
 Sédov, L., 139, 140  
 Sasaki, N., 24, 25, 27–29  
 Schlaseman, C., 12, 13, 15  
 Schneider, U., 63, 198  
 Schulz, T. L., 14  
 SCI, 9–11, 20, 22, 28, 30  
 Seide, P., 106, 109, 152  
 Sekimoto, H., 2, 29, 42,  
     138, 152  
 Sener, K. C., 16, 18, 24–26,  
     31, 37–41, 127  
 Sezawa, K., 127  
 Shanley, F. R., 119  
 Shanmugam, N. E., 15  
 Shaparevich, Y., 10  
 Sheu, M-S., 198, 205  
 Singer, J., 152  
  
 Slutter, R. G., 9  
 Smith, D. W., 7  
 Soheli, K. M. A., 9, 11  
 Solomon, S. K., 7  
 Stowell, E. Z., 120  
 Sunakawa, M., 152  
 Sutharshan, B., 14  
 Sutton, M. A., 161  
 Suzuki, N., 24  
  
 Taguchi, G., 90  
 Takeuchi, M., 12–15, 17,  
     24–29, 152  
 Teertstra, P., 68, 170  
 Terrien, M., 60  
 Thomann, M., 7, 66  
 Thor, J., 57  
 Tiller, W., 158  
 Timoshenko, S. P., 114,  
     226  
 Trefftz, E., 49, 50  
 Tsutagawa, M., 12  
 Tuscher, J-L., 10  
  
 Uchiyama, S., 14, 17  
 Uemura, M., 152  
 Usami, S., 12–15, 17,  
     24–29, 152  
 Uy, B., 30, 55, 114  
  
 Vardy, A. E., 66  
 Varma, A. H., 9, 16, 18,  
     24–29, 31, 37–42,  
     127, 162  
  
 Vijuk, R. P., 14  
  
 Wang, C. M., 119, 226  
 Wang, Y.C. , 70  
 Weimer, J. H., 107, 109  
 Whittaker, A., 29  
 Wierzbicki, T., 102, 105,  
     106, 110, 121,  
     122, 239  
 Willam, K., 57, 58, 62, 63  
 Winitzki, S., 77  
 Winkler, D., 31, 37–41, 127  
 Winter, G., 121  
 Wright, H. D., 7, 17–19,  
     22, 27, 30, 55, 96,  
     114  
  
 Xi, Y., 57, 58, 62, 63  
 Xiang, Y., 119, 226  
 Xie, M., 8, 14, 17–19, 24  
 Xu, L., 33, 34  
  
 Yamamoto, T., 12, 13, 16,  
     33, 36  
 Yandzio, E., 33  
 Yang, Y-F., 33, 34  
 Yao, G. C., 198, 205  
 Yoo, S. T., 31, 33, 35  
 Yovanovich, M. M., 68,  
     170  
 Yu, C., 31–33  
  
 Zhang, K., 18, 24, 26–29,  
     41, 42



# Index

- Accélération, xviii, 1, 13, 69, 143, 144
- Accident  
    ébullition, 16  
    grave, 1, 16, 37–39, 60, 65, 77, 91, 131, 133, 162
- Acier, xvi, xix, 1, 2, 6–12, 14–21, 24–30, 33, 35, 38–40, 42, 46, 55–57, 59, 60, 65, 66, 68–70, 74, 75, 77, 79, 85, 91, 94, 96–100, 105, 115, 131, 133, 142–144, 147, 149–155, 161, 162, 167, 172, 173, 179, 182, 183, 185, 186, 189, 206, 214, 228
- Adhérence, *voir* Interface
- Affleurement  
    défaut de, 150, 170–172, 176, 183
- Airy, *voir* Fonction
- Aliase, 90, 92
- Approximation  
    cinématique, *voir* Galerkin  
    statique, *voir* Trefftz
- Appuis simple, 112, 114, 115, 117, 125, 213, 226, 232, 236, 238, 243
- Bande  
    de Lüders, 55  
    horizontale, xix, 127  
    verticale, xix, 127, 133
- Béton, xix, 1, 2, 6–12, 14–42, 46–48, 51, 55, 60–67, 69, 70, 74, 76, 77, 79, 83, 85, 91, 95–99, 115, 133, 142–144, 147, 150, 161, 168–170, 172, 177, 179, 185, 188, 189, 193–195, 197, 198, 200–202, 204–206, 228, 237
- Bridage, 46, 95, 97, 107, 115, 118, 132, 149, 151, 153–155, 164, 169, 172, 174, 176, 178–183, 186, 187, 205, 227, 229, 237, 238, 244
- Campagne  
    expérimentale, 2, 19, 24, 25, 27, 34, 36, 37, 42, 43, 86, 137, 138, 150, 157, 166, 182, 183, 186, 188, 245
- Casemate, 16
- Champ  
    de déplacement, 158, 172, 174, 187  
    de température, 31, 33, 75, 76, 80, 117, 177
- Chantier  
    organisation, de, 6, 8, 12, 13, 42
- Cisaillement  
    hors-plan, 19, 22–24, 29, 30, 36–38, 41  
    plan, dans le, 22, 24, 25, 27, 36
- Clavage, 13, 42
- Cloquage, 87, 88, 98, 128, 129
- Comparaison, 19, 22, 26–28, 37, 40, 41, 80, 81, 83, 105, 106
- Comportement  
    loi de, 26, 28, 67, 91, 107, 119, 143, 194, 197
- Composite, 1, 2, 6, 7, 12, 16–19, 24, 25, 29, 33, 35, 39, 150, 189
- Compression, xix, 7, 9, 17, 20, 23–25, 28–30, 33, 35, 41, 48, 51, 56, 60–63, 66, 67, 125, 151, 154–156, 190, 194–206, 227, 229
- Condition



- de Dirichlet, 73, 115, 143
- de Lagrange, 133
- de Neumann, 73
- Conduction, 77–79, 84, 85, 96, 142, 144
- Connecteur, xvii, xix, 7, 8, 10, 11, 17–20, 22–33, 35, 37, 38, 42, 46, 66, 67, 76, 77, 80–85, 91, 95, 97, 102, 107, 115, 118, 127, 131–135, 169, 170, 172, 177, 179, 185–187, 189, 191, 229, 231–234, 236, 237, 241, 244
- Consigne, 161–164, 167–170, 172, 173, 177, 178, 180, 182, 183
- Constructibilité, 1, 42
- Contact
  - thermique, 80, 188
  - unilatéral, 51, 189
- Continue, 7, 48, 51, 54, 68, 76, 80, 85, 89, 115, 122, 169, 177, 181, 191, 223
- Contrainte
  - critique, *voir* Critique
  - déviateur des, xvi, 56, 194
  - de pilotage, xviii, 53
  - hydrostatique, 56
  - principales, xviii, 26, 197, 241
  - thermique, 107
- Contraste, 90, 92, 94, 98
- Couplage, xix, 3, 24, 45–47, 62, 63, 70–72, 75, 76, 78, 79, 81, 83, 85, 86, 98, 103, 104, 135, 141, 161, 168, 185–188, 198, 201, 207, 209, 211
  - erreur, *voir* erreur
  - erreur de, 76, 78, 79, 81, 83, 211
- Courbure, xvi, 8, 22, 39–41, 48, 106, 239
- Criblage, 3, 88–91, 95, 97, 98, 125, 131, 135, 185
- Critique
  - coefficient, xvii, 120, 124, 126
  - contrainte, 22, 28, 119
  - post-critique, xvii, 46, 51, 70, 80, 85, 95–97, 102–104, 110–112, 114, 116, 117, 122, 124, 129, 130, 135, 137, 138, 150, 167–169, 171, 173, 177, 180, 181, 186, 187, 213, 218, 223, 224, 226, 228, 230, 243
  - pré-critique, xvii, 95, 96, 98, 111, 112, 116, 117, 131, 135, 171, 186, 214, 224, 226, 230, 243
  - température, 88, 91, 93–96, 98, 100, 103, 104, 111, 120, 124, 125, 127, 130, 131, 133, 138, 147, 149, 150, 166, 167, 171, 172, 177, 180, 181, 186, 223, 230, 236
- Défaut
  - initial, *voir* Imperfection géométrique
- Déformation
  - équivalente, 62, 195
  - grande, 47
  - J2, 119, 120
  - plane, 106, 118, 227
  - principale, xviii, 62, 100–102
  - résiduelle, 55, 56, 61, 201
  - thermique, 107, 203, 204, 228
- Déplacement
  - grand, xviii, 49, 50, 88, 107–111, 121
  - hors-plan, xvii, 39, 91, 93–95, 97, 103, 134, 135, 149, 157, 177, 183, 186, 213, 239
  - petit, 106–110, 116
  - plan, xvii, 97, 105, 133, 149, 151, 152, 169, 176, 178, 179, 181, 183, 186, 187, 214, 227
- Dimensionnement, 5, 11, 14, 18–20, 22, 23, 25, 26, 34, 37, 38, 42, 43, 58, 79, 86, 88, 104, 113, 118, 130–132, 139, 141, 187, 209, 244
- Distorsion, 138, 141, 146, 147
- Domaine
  - fonctionnement, de, 111, 128, 186
- Ductilité, 6, 17, 24–26, 36, 42, 61, 201, 203
- Dynamique, 71, 143, 196, 197
- Ecrouissage
  - cinématique, 56
  - isotrope, xvii, 55, 56, 72, 143, 179
- Effet, 29, 37, 57, 61, 88–90, 92–94, 103, 105, 121, 139, 195

- Elancement, xvi, 28, 30, 34, 83, 91, 94–96, 98, 99, 102, 103, 105, 118, 126, 130, 133–135, 138, 147, 150, 152, 167–170, 172, 173, 183, 185, 187, 225, 226, 229, 237, 240
- Elasticité, xviii, 9, 10, 20, 23, 27, 49, 55–57, 61, 62, 71, 91, 102, 107, 112, 116, 121, 131, 143, 144, 154, 186, 196, 201
- Élément, xix, 1–3, 6–8, 12–19, 22, 24–28, 30, 31, 33, 34, 36–39, 42, 46, 48–53, 58, 67, 70, 77, 81, 83–85, 88, 91, 96–100, 102–104, 114, 115, 118–120, 123, 128, 129, 131–135, 143, 147, 149–155, 157, 159, 161–164, 168–170, 173, 175, 179, 181–183, 185–187, 189, 191, 193, 201, 213, 229, 231, 234–237, 240, 243
- cohésif, 67, 85, 99, 133
- composite, *voir* Composite
- modulaire, *voir* Modulaire
- Éléments finis, 2, 3, 49, 50, 52, 70, 115, 119, 120, 123, 129, 131–135, 149, 159, 181, 236, 237, 240
- Encastré, 28, 112, 117, 125, 213, 226, 227, 231–234, 236, 238, 243
- Encastrement, 115, 189
- Enceinte, 15, 16, 149, 152, 237
- Endommagement, xvi, xvii, 25, 41, 48, 61–63, 72, 74, 143, 144, 193–197, 200, 201, 204, 206
- Energie
- de déformation, xvii, 239
- de flexion, 239
- libre, 62, 193, 194, 196
- potentielle, xvi, xviii, 49, 50, 53, 54, 113, 238, 239
- Equation
- équilibre, d', 21, 48, 74, 120, 142, 143, 243
- cinématique, 106, 143
- de la chaleur, 72, 142
- Equilibre
- mécanique, 75
- thermique, 73, 75
- Erreur
- de couplage, 76, 78, 79, 81, 83
- fonction, xviii, 77, 114, 116, 117, 207, 208
- Essai, 2, 3, 11, 17–19, 24, 25, 28, 33–39, 55, 58, 60–63, 66, 68, 69, 89, 90, 138, 139, 146, 147, 150–152, 154–158, 161, 164–173, 175–183, 187, 198, 200, 201, 205, 206
- Etude
- de sensibilité, 48, 88, 95, 96, 98, 103, 135, 189
- paramétrique, *voir* Criblage
- Euler, 28, 48, 49
- Feu, 14, 31–34, 112
- Fissure, 17, 18, 24, 37–39, 60, 61, 176, 195, 196, 200, 201, 206
- Flambement, 7, 28, 30, 33, 35, 36, 38, 41–43, 48, 49, 51, 53, 54, 75, 83, 85, 86, 88, 93, 95–100, 102–104, 112–114, 118–120, 122, 123, 125–128, 130, 133–135, 168, 182, 186, 187, 189–191, 205, 224, 227–234, 236, 237, 240
- Flexion, xvii, xix, 17–20, 22, 24, 28, 36–40, 76, 95, 96, 98–100, 102–104, 108, 109, 131, 135, 154, 155, 171, 174, 176, 182, 183, 186, 224, 239
- Fluage, 9, 57
- Flux, xvi, 31–33, 80, 142, 163, 179, 180, 228
- Fonction
- d'Airy, xvii, 109, 111
- erreur, *voir* Erreur
- Formaldéhyde, 178
- Fragilité, 23, 60, 67, 143, 193, 194
- Galerkin, xvi, 87, 88, 113, 114, 116, 117, 135, 213, 216, 217, 220, 226–228, 240, 241, 244
- Glissement, *voir* Interface

- Grandeur  
fondamentale, 139
- HEB, 155, 157, 158, 164, 179, 183, 245
- Hypothèse, 2, 3, 18, 20, 22, 25, 39, 40, 42, 45, 46, 49, 55, 58, 61, 69, 75, 77, 78, 80–86, 94, 95, 97, 98, 103–112, 115, 117, 118, 121, 123–126, 128, 132, 133, 135, 145, 147, 148, 176, 179, 180, 182, 183, 186, 187, 191, 209, 214, 226
- de Kirchoff-Love, 105
- Imperfection  
géométrique, xvii, 17, 49, 96, 109, 110, 116, 117, 122, 124, 133, 135, 150, 171, 176, 177, 186, 191, 229
- Incendie, 14, 31, 33, 35, 42
- Ingénierie, 2, 3, 13, 42, 46, 87–89, 104, 118, 131, 135, 214
- Interaction, 22, 30, 71, 89–95
- Interface  
adhésion, 7, 9, 18, 20–22, 29, 66–68, 143, 144  
glissement à, 7, 18, 19, 30, 67, 68, 175
- Isolant, 31, 64, 69, 79, 154, 155, 157, 164, 168–170, 179, 181–183, 245
- Isolation, 14, 153–155, 157, 164, 166, 172, 173, 175, 177, 228
- Isothermie, xvi, 96, 103, 115, 125, 147, 149, 162, 183, 186, 213, 214, 226–228, 231–236
- Isotrope, xvii, 25, 55, 56, 60, 61, 72, 105, 143, 146, 147, 179, 194–197, 204, 226
- Kayence, 176
- Linéaire, 3, 21, 26, 28, 34, 40, 41, 46–50, 52, 53, 55, 56, 60, 67, 71, 77, 85, 90, 95, 97–99, 104–106, 112, 116, 119, 122, 135, 156, 171, 177, 178, 185, 186, 194, 197, 198, 200, 223, 225, 238
- Lüders, *voir* Bandes
- LVDT, 37, 157, 158, 162, 164, 165, 167, 170, 171, 175, 178, 183
- Matrice  
de projection, 158, 161  
des effets, 90
- Mazars  
modèle de, 61, 62, 179, 193, 205
- Mesure  
ponctuelle, 158, 167  
système de, 139–141
- Microscope, *voir* Kayence
- Mire, 159, 161, 165
- Mode  
de voilement, 5–7, 17–20, 23, 24, 26, 28, 30, 33, 35, 36, 39, 42, 50, 51, 54, 55, 67, 85, 95, 96, 104, 114, 116, 118, 123, 125–128, 131, 133, 140, 169, 172–176, 186, 189, 191, 205, 228, 229, 231–234, 236, 244
- Modulaire, 1, 2, 6, 8, 13, 15, 22, 24, 25, 28, 31, 37, 39, 42, 51, 53, 98, 102–105, 114, 118, 123, 132, 135, 138, 150, 187, 213
- Modularité, 1, 6
- Module  
d'inertie, xvii, 48  
d'Young, xvii, 57, 58, 60, 65, 91, 119, 131, 143, 152, 154, 156
- Moment  
d'inertie, 17  
de correction, 115, 124, 216, 220, 226, 227, 236, 237  
résistant, 20–22  
somme, xvii, 110, 115, 238  
thermique, 40, 41, 96, 115, 135, 214, 228
- Montage, 38, 152, 155, 164, 165, 182
- Mortier, 7, 66, 155–157, 164, 166, 179, 183
- Neutre  
axe, 20, 21, 39  
plan, xix, 106
- Newton

- méthode de, xix, 47, 52–54, 85, 160, 163
- Normatif, 2
- NURBS, 158–160
- Optimisation, 89
- Orthotrope, 25
- Pesanteur, xviii, 69, 143, 144
- Phénoménologie, 55, 60, 70, 185, 193
- Pilotage, xviii, 52–54
- Piscine, 16, 147
- Plaque  
épaisse, 105  
mince, 3, 88, 95, 104, 105, 213, 226
- Plasticité, 3, 26, 56, 88, 98, 100–104, 118, 120–122, 135, 143, 150, 178, 186, 187, 197, 200, 201
- Plastification, xix, 7, 17–20, 22, 25–29, 36, 95, 99, 100, 104, 121, 122, 128, 132, 133, 135, 169, 186, 222, 223, 230
- Plats  
rainurés, 37, 155, 164, 179, 181–183, 245
- Poteau, 15, 28, 31, 33, 34, 69
- Potentiel, *voir* Energie libre
- Poutre, 7, 11, 14, 15, 17, 19, 28, 33, 36, 37, 48, 105, 155
- Protection, 1, 15, 33, 34
- Protocole, 3, 137, 139, 150, 152, 164, 165
- Quadratique, 122, 160, 223–226
- Résine, 7, 66, 154, 157, 166, 169, 172, 173, 182, 183
- Raccord, xvii, 121, 122, 186, 213, 223–226, 230
- Raideur  
de flexion, xvii, 38, 40, 108  
de membrane, xvii, 108  
des conditions limites, 97, 103, 124, 186, 229  
géométrique, xviii, 47  
matérielle, 48
- Rayonnement, 31, 69, 161
- Refroidissement, 14, 16, 36, 152, 161, 165, 168, 178, 182
- Régime, xvii, 46, 60, 63, 77, 80, 85, 95–100, 102, 104, 110–112, 116, 117, 122, 124, 130, 133, 135, 138, 149, 150, 168, 171, 173, 177, 181, 186–188, 198, 213, 214, 218, 224, 228, 230, 240, 243
- Reissner-Mindlin, *voir* Plaque épaisse
- Retard, 57, 70, 75, 125, 167, 171, 183, 185
- Retrait, 9, 37, 38, 48, 60, 66, 156, 183
- Rotation, xvi, 37, 102, 112, 115, 155, 164, 214, 226, 227, 229, 237, 243
- Ruine, 5–7, 11, 17–20, 22–24, 26–28, 30, 33, 35, 36, 38, 39, 42, 56, 66, 99, 152, 154, 155, 167, 169, 182, 183
- Séisme, 14, 16, 17
- Série  
de Fourier, 115, 216, 220  
de Taylor, 76, 185  
entière, 77, 78, 207, 208  
vitesse de convergence, 200
- Silicone, 162, 178, 182
- Similitude, 138, 141, 144, 147
- Solution  
analytique, 77, 81, 83, 88, 105, 119, 120, 123, 129–131, 135, 181–183, 186, 211, 213, 238, 240  
numérique, 55, 71, 83, 225, 226
- Soudure, 2, 6, 13, 14, 18, 35, 81, 96, 97, 150, 175, 176
- Sous-système  
mécanique, xix, 71, 143, 144, 146, 185  
thermique, xix, 75, 85, 142–144, 146, 185
- Stabilité, 1–3, 6, 46–52, 54, 55, 67, 83, 85, 94–100, 102, 123, 130, 167, 168, 176, 177, 185, 189–191, 236
- Statique, xvi, 8, 9, 56, 109, 113, 143, 145, 201
- Stereo-corrélation, 3, 157–162, 164, 165,

- 167–170, 172–174, 176, 178, 179,  
181–183, 187
- Structure SC, 7–9, 11, 17, 18, 22, 24–26, 28,  
30, 31, 33, 35, 36, 38–40, 43, 46, 48,  
53, 55, 85, 88, 91, 97, 103, 123, 128,  
129, 135, 138, 185, 186
- Sûreté, 1, 6
- Température  
écart de, xvi, 32, 229  
ambiante, 2, 5, 6, 17, 31, 36, 38, 40, 42,  
55, 60, 63, 64, 102, 104, 127, 152,  
172, 198  
critique, *voir* Critique  
plastification de, 100, 121, 122, 128,  
230
- Thermo-mécanique, 39, 45, 46, 70, 76, 85,  
138, 141, 146, 182
- Thermocouple, 37, 157, 161, 162, 164, 165,  
172
- Tirant, 7, 8, 10, 11, 14, 18, 23, 24, 35, 66, 81,  
132, 133, 142, 143, 149–152, 157,  
161, 163, 164, 177, 179
- Tolérance, 13, 42, 78, 85, 155, 157
- Traction, xix, 17, 18, 24–26, 28, 29, 55, 56,  
60–63, 67, 68, 125, 143, 161,  
194–201, 204–206, 227, 229
- Transfert, 7, 8, 10, 46, 58, 64, 66, 69, 70, 80,  
81, 83–85, 91, 94, 103, 135, 142,  
145, 147, 168, 188, 228
- Trefftz, 49, 50, 113, 213, 240
- Unité, 107, 110, 138–140, 144, 145, 147,  
199
- Validation, 3, 18, 41, 81, 86, 88, 123, 128,  
131, 132, 147, 157, 180, 181, 183
- Variable  
adimensionnée, 140, 141, 143  
d'état, xvii, 72  
dérivée, 139  
interne, 193, 194, 197, 198
- Verre  
trempé, 154, 155, 157, 166–168, 175,  
183
- Vitesse  
de chauffe, 62, 91, 94, 96, 97  
de convergence, *voir* Série  
de propagation, 58
- Voile, 14, 15, 17, 24, 35, 39, 46, 127, 134,  
146, 147, 166, 189–191
- Voilement, 2, 3, 17, 18, 22, 26–30, 42, 45,  
46, 48, 51, 53, 66, 67, 70, 71, 79, 81,  
83–85, 87, 88, 91, 94–100, 102–104,  
106, 111, 113, 123–128, 131–133,  
135, 137, 138, 142, 143, 147,  
149–152, 156, 157, 162, 163, 166,  
167, 169–173, 175–179, 182, 183,  
185–187, 206, 213, 226, 229, 236,  
238
- von Karman, 3, 88, 104, 105, 112, 113, 121,  
122, 135, 186, 238
- von Mises, xix, 25, 56, 121